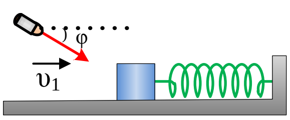
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΡΟΥΣΗ.

Θα μελετήσουμε τώρα συστήματα που η ταλάντωση ξεκινά εξαιτίας μίας κρούσης ή έχουμε ήδη μία ταλάντωση και κάπου στην πορεία συμβαίνει και μία κρούση.

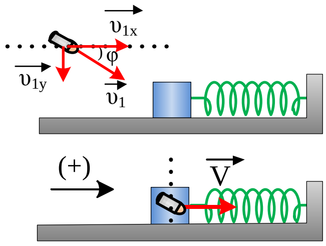
1. Σώμα που κινείται με κάποια ταχύτητα που σχηματίζει γωνία φ ως προς το κεκλιμένο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.



Σώμα μάζας m_1 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ σχηματίζοντας γωνία φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_2 πλαστικά που βρίσκεται δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.



Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση οπότε το σύστημα είναι μονωμένο εκεί και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{1x}$ θετική). Στον κατακόρυφο άξονα δεν έχουμε διατήρηση της ορμής αφού μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα κινείται οριζόντια και η ορμή στον κατακόρυφο άξονα θα είναι μηδέν.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,(x)} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,(x)} \Rightarrow \vec{p}_{1,x} = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi}{m_1 + m_2}$$

Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. της ταλάντωσης οπότε η ταχύτητα $\vec{V}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης και ισχύει $V = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{V}}{\boldsymbol{\omega}}$, κυκλική συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση

$$D = k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}.$$

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση

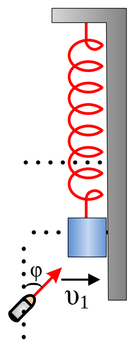
$$K_{max} = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \mathbf{A = V\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με $\upsilon > 0$, άρα δεν έχουμε αρχική φάση, οπότε: $x = A\eta\mu\omega t$.

2.Α. Πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ελατήριο με το πάνω άκρο στην οροφή (δεξιά έχουμε λείο κατακόρυφο τοίχο).

Σώμα μάζας m_1 εκτοξεύεται προς τα πάνω προς το κατακόρυφο ελατήριο όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2, η κρούση τους είναι πλαστική και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ.



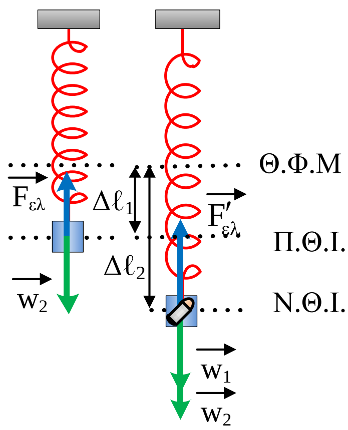
Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Το σώμα m_2 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_2 = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k}}$

Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

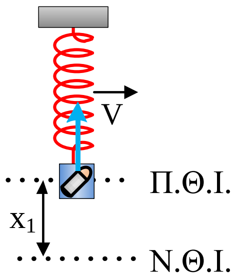
$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 = F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 g + m_2 g = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_2 = \frac{m_1 g + m_2 g}{k}}$$



Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:

$x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g + m_2 g}{k} - \dfrac{m_2 g}{k} \Rightarrow \mathbf{x_1 = \dfrac{m_1 g}{k}}$ (δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m_1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.



Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2, \vec{F}_{ελ}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{υ}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ,(y)} = \vec{p}_{τελ,(y)} \Rightarrow \vec{p}_{1,y} = \vec{p}_{συσ} \Rightarrow m_1 υ_1 συνφ = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1 υ_1 συνφ}{m_1 + m_2}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Θ.Ι. όπου $x_1 = \frac{m_1 g}{k}$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \mathbf{A} = \sqrt{\frac{\mathbf{(m_1 + m_2)V^2}}{\mathbf{k}} + \mathbf{x_1^2}}$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

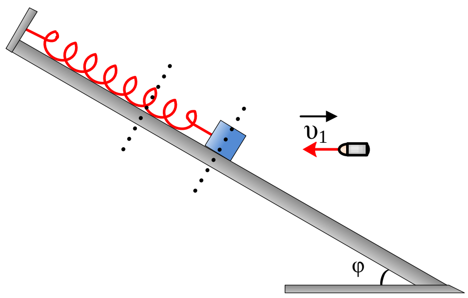
Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \neq 0$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $Aημφ_0 = \pm x_1 \Rightarrow ημφ_0 = \frac{\pm x_1}{A}$.

Το πρόσημο εξαρτάται από τη φορά που θα πάρουμε ως θετική, έτσι αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα πάνω τότε έχουμε $x_1 > 0$ και $V > 0$, ενώ αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα κάτω τότε έχουμε $x_1 < 0$ και $V < 0$.

2.Β. Πλαστική κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο με το πάνω άκρο στην κορυφή.

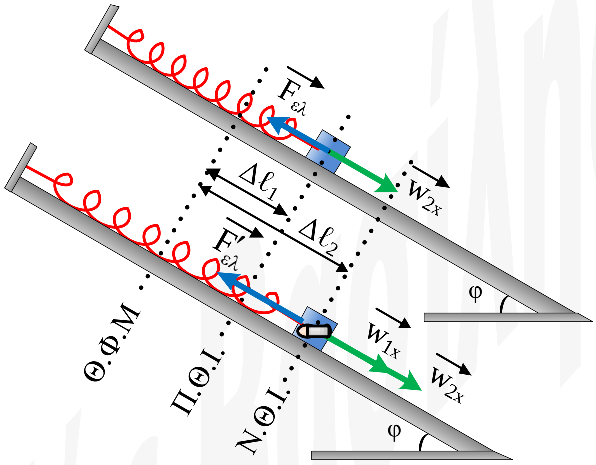
Σώμα μάζας m_1 εκτοξεύεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2 δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k, η κρούση τους είναι πλαστική και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ.



Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Το σώμα m_2 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{2x}=F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_1=\frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k}}$



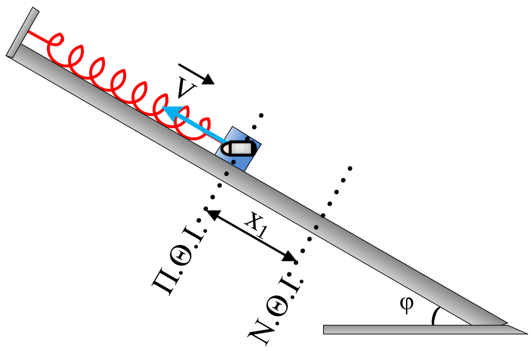
(Στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί οι κάθετες στην κίνηση δυνάμεις για χάριν απλότητας)

Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{1x}+w_{2x}=F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_2=\frac{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}{k}}$$

Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:



$$x_1=\Delta\ell_2-\Delta\ell_1=\frac{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}{k}-\frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \boldsymbol{x_1=\frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k}}$$

(δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m_1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.

Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, $\vec{N}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{1x}$ θετική).

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,(x)} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,(x)} \Rightarrow \vec{p}_{1,x} = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi}{m_1 + m_2}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Θ.Ι. όπου $x_1 = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k}$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \mathbf{A} = \sqrt{\frac{\mathbf{(m_1 + m_2)V^2}}{\mathbf{k}} + \mathbf{x}_1^2}$$