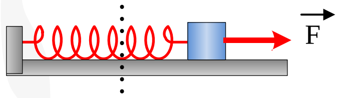
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΠΟΥ ΑΡΓΟΤΕΡΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΚΑΤΑΡΓΗΘΕΙ.

Θα μελετήσουμε τώρα συστήματα που διεγείρονται σε ταλάντωση μέσω εξωτερικής δύναμης που μπορεί να είναι (όπως θα δούμε παρακάτω) σταθερή, μεταβλητού μέτρου σταθερής κατεύθυνσης.

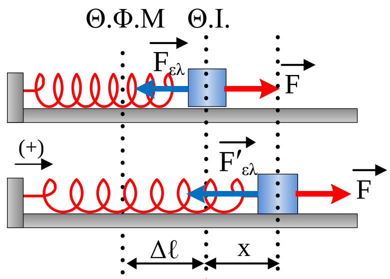
1. Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης.



Σε σώμα μάζας m που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε σταθερή δύναμη $\vec{F}$ έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να δειχθεί ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.



Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης πλέον δεν είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αλλά εκεί που ισχύει $\Sigma\vec{F}=0$ οπότε έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow F=F_{ελ} \Rightarrow F=k\Delta\ell \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell=\frac{F}{k}} \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F=F-F'_{ελ}\overset{(1)}{=}k\Delta\ell-k(\Delta\ell+x)=-kx=-Dx$

Άρα έχουμε Α.Α.Τ. με D = k.

Δηλαδή η σταθερή δύναμη δεν επηρεάζει την σταθερά επαναφοράς που ισχύει ότι και σε ένα οριζόντιο ελατήριο χωρίς την εξωτερική αυτή δύναμη.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **A = Δℓ** αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από την Θ.Φ.Μ. με μηδενική ταχύτητα άρα έχουμε ακραία θέση.

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα και θετική τη φορά προς τα δεξιά.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = –A, οπότε έχουμε αρχική φάση.

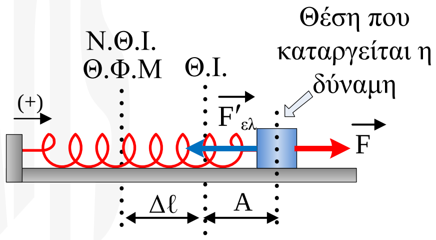
Για t_0 = 0 έχουμε: $x=-A \Rightarrow Aημφ_0=-A \Rightarrow ημφ_0=-1 \Rightarrow \mathbf{φ_0=\frac{3π}{2}rad}$.

Ερωτήματα που προκύπτουν αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί σε κάποια θέση της ταλάντωσης.

Όπως θα δούμε παρακάτω έχει σημασία η θέση που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$. Τις περιπτώσεις αυτές θα τις δούμε παρακάτω.

γ. Αν η δύναμης $\vec{F}$ καταργηθεί στο δεξιό άκρο της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;

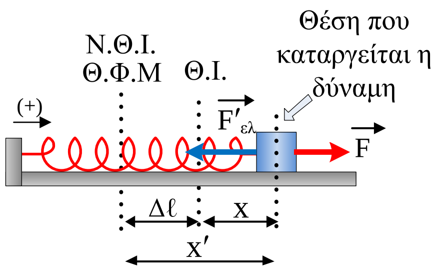
Στο άκρο της ταλάντωσης η ταχύτητα είναι μηδέν οπότε θα είναι άκρο για την νέα ταλάντωση. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα:



$$A' = A + \Delta\ell \overset{A=\Delta\ell}{\Rightarrow} A' = A + A \Rightarrow \mathbf{A' = 2A}.$$

δ. Αν η δύναμης $\vec{F}$ καταργηθεί δεξιά της Θ.Ι. της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.



Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση.

$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$. Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

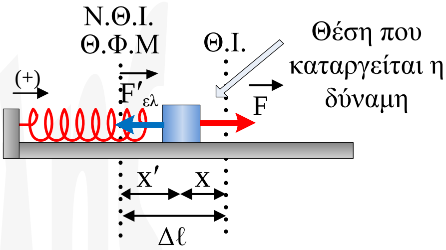
Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = x + \Delta\ell \Rightarrow \mathbf{x' = x + A}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση:

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx'^2 \Rightarrow \mathbf{A' = \sqrt{\frac{m\upsilon^2}{D} + x'^2}}$$

Αν θέλουμε να βρούμε την αρχική φάση για την νέα ταλάντωση θέτουμε για t = 0, $x' = A'ημφ_0$ και λύνοντας τη, κρατάμε τη λύση που επαληθεύει το πρόσημο της ταχύτητας.

ε. Αν η δύναμης $\vec{F}$ καταργηθεί αριστερά της Θ.Ι. της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;



Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}\,.$$

Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

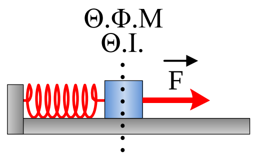
Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = \Delta\ell - x \Rightarrow \boldsymbol{x' = A - x}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση:

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx'^2 \Rightarrow \boldsymbol{A' = \sqrt{\frac{m\upsilon^2}{D} + x'^2}}$$

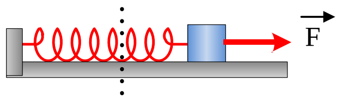
Αν θέλουμε να βρούμε την αρχική φάση για την νέα ταλάντωση θέτουμε για t = 0, $x' = A'\eta\mu\varphi_0$ και λύνοντας τη, κρατάμε τη λύση που επαληθεύει το πρόσημο της ταχύτητας.

στ. Τι θα συμβεί αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου;



Η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αποτελεί άκρο για την υπάρχουσα ταλάντωση, άρα εκεί θα έχει ταχύτητα μηδέν. Με την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης είναι η Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Έτσι λοιπόν έχουμε το σώμα με μηδενική ταχύτητα στη Θ.Ι. οπότε θα παραμείνει ακίνητο χωρίς να ταλαντώνεται.

2. Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου.



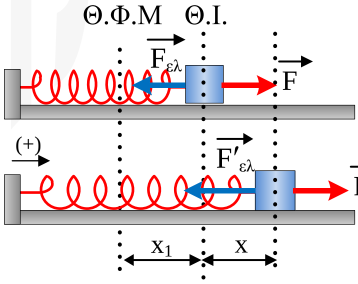
Σε σώμα μάζας που m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο που δίνεται από τη σχέση $F = \alpha + \beta x$ (όπου α, β θετικές σταθερές) έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή άσκησης της δύναμης $\vec{F}$.

Σημείωση: Μία τέτοια περίπτωση έχει νόημα μόνο όταν η μεταβαλλόμενη δύναμη που έχει την μορφή $F = \alpha + \beta x$ έχει τέτοια στιγμή ο συντελεστής β ώστε να ισχύει $\beta < k$ έτσι ώστε κάποια στιγμή η δύναμη του ελατηρίου να γίνεται ίση με την δύναμη $\vec{F}$ (αλλιώς το σώμα θα επιταχύνεται συνεχώς).

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να δειχθεί ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης πλέον δεν είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αλλά εκεί που ισχύει $\Sigma\vec{F} = 0$ οπότε έχουμε:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \alpha + \beta x_1 = kx_1 \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{k - \beta}} \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F - F'_{\varepsilon\lambda} = \alpha + \beta(x + x_1) - k(x_1 + x) = \alpha + \beta x + \beta x_1 - kx_1 - kx \overset{(1)}{=} -(k - \beta)x = -Dx$$

Άρα έχουμε Α.Α.Τ. με $D = k - \beta$.

Δηλαδή **η μεταβαλλόμενη δύναμη επηρεάζει την σταθερά επαναφοράς του συστήματος** και δεν ισχύει πλέον $D = k$.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $\mathbf{A = x_1}$ αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από την Θ.Φ.Μ. με μηδενική ταχύτητα άρα έχουμε ακραία θέση.

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα και θετική τη φορά προς τα δεξιά.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -A$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = -A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = -A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0} = \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{rad}$.

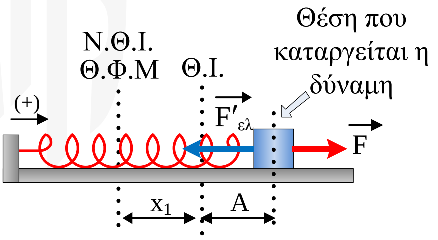
Επίσης έχουμε: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\mathbf{k - \beta}}{\mathbf{m}}}$

Ερωτήματα που προκύπτουν αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί σε κάποια θέση της ταλάντωσης.

Όπως θα δούμε παρακάτω έχει σημασία η θέση που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$. Τις περιπτώσεις αυτές θα τις δούμε παρακάτω. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι θα αλλάξει και σταθερά επαναφοράς αφού από D = k – β θα έχουμε μετά την κατάργηση της δύναμης D = k.

γ. Αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί στο δεξιό άκρο της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;

Στο άκρο της ταλάντωσης η ταχύτητα είναι μηδέν οπότε θα είναι άκρο για την νέα ταλάντωση. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα:

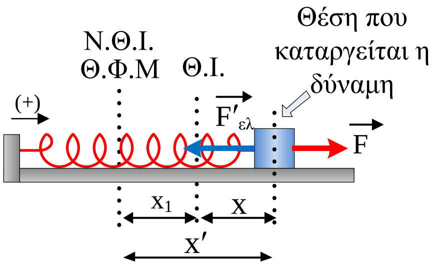


$$A' = A + x_1 \overset{A=x_1}{\Rightarrow} A' = A + A \Rightarrow \mathbf{A' = 2A}.$$

δ. Αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί δεξιά της Θ.Ι. της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση (με D = k – β).



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm\sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m}}}.$$

Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

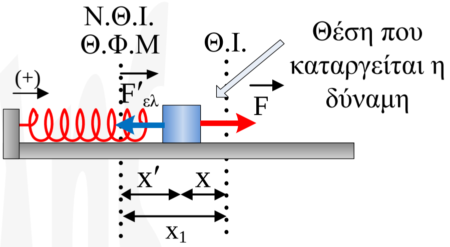
Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = x + \Delta\ell \Rightarrow \mathbf{x' = x + A}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση (με D′ = k):

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}D'A'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D'x'^2 \Rightarrow \boldsymbol{A' = \sqrt{\frac{m\upsilon^2}{D'} + x'^2}}$$

Αν θέλουμε να βρούμε την αρχική φάση για την νέα ταλάντωση θέτουμε για t = 0, $x' = A'\eta\mu\varphi_0$ και λύνοντας τη, κρατάμε τη λύση που επαληθεύει το πρόσημο της ταχύτητας.

ε. Αν η δύναμης $\vec{F}$ καταργηθεί αριστερά της Θ.Ι. της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;



Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση (με D = k – β).

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm\sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m}}}.$$

Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

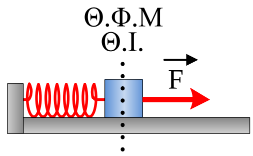
Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = \Delta\ell - x \Rightarrow \boldsymbol{x' = A - x}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση (με D′ = k):

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}D'A'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D'x'^2 \Rightarrow \boldsymbol{A' = \sqrt{\frac{m\upsilon^2}{D'} + x'^2}}$$

Αν θέλουμε να βρούμε την αρχική φάση για την νέα ταλάντωση θέτουμε για t = 0, $x' = A'\eta\mu\varphi_0$ και λύνοντας τη, κρατάμε τη λύση που επαληθεύει το πρόσημο της ταχύτητας.

στ. Τι θα συμβεί αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου;



Η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αποτελεί άκρο για την υπάρχουσα ταλάντωση, άρα εκεί θα έχει ταχύτητα μηδέν. Με την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης είναι η Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Έτσι λοιπόν έχουμε το σώμα με μηδενική ταχύτητα στη Θ.Ι. οπότε θα παραμείνει ακίνητο χωρίς να ταλαντώνεται.