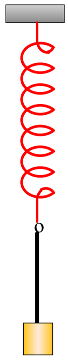
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΗΝ ΑΑΤ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ – ΣΩΜΑ ΚΑΙ ΝΗΜΑ



1. Σώμα μάζας m = 4 kg ισορροπεί προσδεμένο μέσω αβαρούς νήματος στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Όταν προσφέρουμε στο σύστημα ενέργεια $E_{πρ.} = 0,5$ J αυτό αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

α. το πλάτος της ταλάντωσης.

β. την τάση του νήματος σε σχέση με το χρόνο.

γ. το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, για το οποίο το νήμα παραμένει συνεχώς τεντωμένο.

δ. αν το σώμα το τραβήξουμε 80 cm κάτω από τη Θ.Ι. και το αφήσουμε να βρείτε ποιο πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού ώστε το σώμα μόλις που να ακουμπά στο ελατήριο και ποια χρονική στιγμή θα συμβεί αυτό.

ε. αν το σύστημα μας έχει την διάταξη ταβάνι νήμα ελατήριο σώμα ποιο το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης ώστε το νήμα να μην χαλαρώνει

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10$ m/s^2, π = 3,14, $\sqrt{3} \simeq 1,7$, θετική η φορά προς τα πάνω.

Λύση

α. Η προσφερόμενη ενέργεια είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης άρα: $E_{πρ} = E \Rightarrow E_{πρ} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$

$$A = \sqrt{\frac{2E_{πρ}}{k}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{100}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,1m}$$

β. Το σώμα εκτελεί ταλαντώσεις χωρίς αρχική φάση και κυκλικής συχνότητας ω.

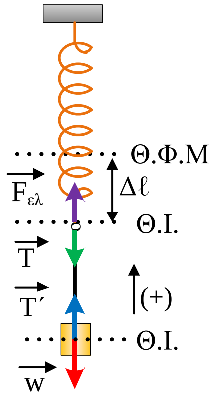
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\frac{rad}{s}}$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$x = Aημωt \Rightarrow \mathbf{x = 0,1ημ5t \ \ (S.I.)}$.

Για την ταλάντωση ισχύει: $ΣF = -Dx \Rightarrow T - mg = -Dx \Rightarrow T = 40 - 100 \cdot 0,1ημ5t \Rightarrow \mathbf{T = 40 - 10ημ5t \ \ (S.I.)}$

γ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε στην Θ.Ι..

Ελατήριο: $Σ\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} = -\vec{T} \Rightarrow T = F_{ελ} \Rightarrow T = kΔ\ell$



Νήμα: Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $\vec{T} = -\vec{T'} \Rightarrow T = T'$

Σώμα: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T'} = -\vec{w} \Rightarrow T' = w \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{mg}{k}$

Για την ταλάντωση του Σ σε μια τυχαία θέση ισχύει

$$\Sigma\vec{F} = -D\vec{x} \Rightarrow \vec{T'} + \vec{w} = -D\vec{x} \Rightarrow T' - w = -Dx \Rightarrow T' = mg - Dx$$

Για να έχουμε Α.Α.Τ. θα πρέπει

$$T' \geq 0 \Rightarrow mg - Dx \geq 0 \Rightarrow mg \geq Dx \Rightarrow x \leq \frac{mg}{D} \Rightarrow x \leq \frac{40}{100} \Rightarrow \mathbf{x \leq 0,4\,m}$$

ή $\mathbf{A_{max} = 0,4\,m}$

δ. Αν τραβήξουμε το σώμα προς τα κάτω κατά 0,8 m και το αφήσουμε αυτό θα είναι και το πλάτος της ταλάντωσης. Όπως είδαμε παραπάνω το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση ως την στιγμή που φτάνει στη Θ.Φ.Μ. και μετά από κει θα κάνει βολή προς τα πάνω.

Θεωρώ θετική την φορά προς τα πάνω, οπότε η νέα ταλάντωση ξεκινά με πλάτος 0,8 m και αρχική φάση 3π/2 rad. Έτσι θα είναι της μορφής x = 0,8ημ(5t + 3π/2) S.I.

Το νήμα όπως είπαμε χαλαρώνει όταν x ≤ 0,4 m και αυτό θα συμβεί τη χρονική στιγμή:

$$0,4 = 0,8ημ(5t + \frac{3π}{2}) \Rightarrow ημ(5t + \frac{3π}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5t + \dfrac{3π}{2} = 2κπ + \dfrac{π}{6} \\ 5t + \dfrac{3π}{2} = 2κπ + \dfrac{5π}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 30t + 9π = 12κπ + π \\ 30t + 9π = 12κπ + 5π \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} t = \dfrac{12κπ - 8π}{30} \\ t = \dfrac{12κπ - 4π}{30} \end{matrix}\right\} \text{(S.I.)}$$. Άρα για πρώτη φορά t_1 = 2π/15 s.

Η ταχύτητα εκείνη τη στιγμή είναι: $υ_1 = 4συν(5t_1 + \frac{3π}{2}) \Rightarrow υ_1 = 4συν(5\frac{2π}{15} + \frac{3π}{2}) \Rightarrow \mathbf{υ_1 = 2\sqrt{3}}$ **m/s.**

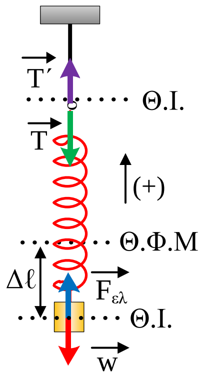
Αφού θέλουμε μόλις που να φτάσει το σώμα στο ελατήριο σημαίνει ότι θα φτάσει με μηδενική ταχύτητα άρα:

$$υ = υ_1 - g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{υ_1}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\sqrt{3}}{10}\,s \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,2\sqrt{3}\,s}.$$

Το μήκος του σχοινιού είναι: $h = \upsilon_1 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 = 2\sqrt{3} \cdot 0,2\sqrt{3}\,m - \frac{1}{2} 10 \cdot 0,12\,m \Rightarrow \mathbf{h = 0,6\,m}$.

Η χρονική στιγμή που το σώμα στο ελατήριο είναι $t_2 = t_1 + \Delta t = (0,42 + 0,34)s \Rightarrow \mathbf{t_2 = 0,76\,s}$.

ε. Για να μην χαλαρώνει το νήμα θα πρέπει το ελατήριο να μην ασκεί δύναμη προς τα πάνω. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το ελατήριο να είναι συνεχώς επιμηκυμένο, δηλαδή το σώμα να μην ξεπερνά τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα ισχύει πάλι



$$A_{max} = \frac{mg}{k} \Rightarrow \mathbf{A_{max} = 0,4\,m}$$