Τα χαρακτηριστικά του κύματος

1. Στην ήρεμη επιφάνεια μιας δεξαμενής με νερό αφήνουμε να πέφτουν μικρές σταγόνες νερού (από κάποια βρύση) με ρυθμό 24 σταγόνες το λεπτό. Αν η οριζόντια απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος είναι 5 cm. Να βρείτε:

α. την συχνότητα με την οποία πέφτουν οι σταγόνες

β. την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο νερό

γ. την απόσταση που έχει διαδοθεί το κύμα σε 20 sec

Λύση

α. Η συχνότητα δίνεται από τη σχέση $f = \frac{N}{t} \Rightarrow f = \frac{24}{60} \Rightarrow \mathbf{f = 0,4\,Hz}$

β. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών είναι σύμφωνα με τον ορισμό το μήκος κύματος άρα λ = 5 cm ⇒ **λ = 0,05 m**. Η ταχύτητα διάδοσης δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \lambda \cdot f \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 0,02\,\frac{m}{s}}$

γ. Η ταχύτητα του κύματος δίνεται και από τη σχέση $\upsilon = \frac{d}{t} \Rightarrow d = \upsilon \cdot t \Rightarrow \mathbf{d = 0,4\,m}$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να βρούμε την περίοδο $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \mathbf{T = 2,5\,s}$ και να βρούμε τα κύματα που έχουν διαδοθεί αφού σε κάθε περίοδο έχουμε και διάδοση ενός κύματος. $t = NT \Rightarrow N = \frac{t}{T} \Rightarrow \mathbf{N = 8}$

άρα d = Nλ ⇒ d = 8·0,05 ⇒ **d = 0,4 m**

2. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας στη θήλασα τα κύματα που έχουν δημιουργηθεί έχουν ύψος ℓ = 3 m από την «κορυφή» έως την «κοιλάδα». Τα κύματα που φτάνουν σε ένα πλοίο "σκάνε" πάνω του με ρυθμό 20 κύματα σε κάθε 5 δευτερόλεπτα. Η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύουν τα κύματα είναι υ = 144 km/h. Να βρείτε:

α. Την οριζόντια απόσταση μιας «κορυφής» από την γειτονική της «κοιλάδα» του κύματος;

β. Την μέγιστη απόσταση μεταξύ μιας κορυφής και της γειτονικής της κοιλάδας

γ. Την μέγιστη ταχύτητα και την μέγιστη επιτάχυνση με την οποία ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο μία σημαδούρα που επιπλέει.

Για τις πράξεις $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας κορυφής και της γειτονική της κοιλάδας είναι $d = \frac{\lambda}{2}$.

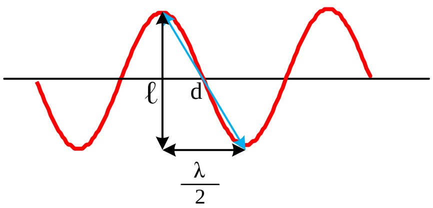
Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $\upsilon = \frac{144\,\text{km}}{\text{h}} = \frac{14400\,\text{m}}{3600\,\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 40\,\frac{m}{s}}$ και η συχνότητα του κύματος

$f = \frac{N}{t} \Rightarrow \boldsymbol{f = 5\,Hz}$. Άρα $\upsilon = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \Rightarrow \lambda = 8\,\text{m}$, έτσι $d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boldsymbol{d = 4\,m}$

β. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ μιας κορυφής και της γειτονικής της κοιλάδας είναι όταν και οι δύο βρίσκονται στην μέγιστη τους απομάκρυνση όπως στο σχήμα.

$$d = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \Rightarrow \boldsymbol{d = 5\,m}$$

γ. Το πλάτος του κύματος είναι $A = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 1{,}5\,m}$ και η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\pi}$ **rad/s.**



Άρα: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 15\pi}$ **m/s** και $\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{max} = 1500}$ **m/s²**

3. Στην επιφάνεια ενός υγρού διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι υ = 10 m/s και το μήκος κύματος λ = 0,2 m. Η πηγή που παράγει το κύμα ταλαντώνεται με πλάτος A = 0,2 m. Να υπολογίσετε:

α. το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου μεταβαίνει από τη θετική ακραία στην αρνητική ακραία θέση ταλάντωσης,

β. πόσες φορές επαναλαμβάνεται η κυματική εικόνα τη στιγμή $t_1 = 2$ s,

γ. το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται ένας μικρός φελλός μάζας 1 g στην επιφάνεια του υγρού.

Δίνεται: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ένα σωματίδιο του μέσου για να μεταβεί από την μία ακραία θέση στην άλλη είναι ίσο με μισή περίοδο, $\Delta t = \frac{T}{2}$.

Από την ταχύτητα έχουμε: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{T = 0,02\,s}$ άρα $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,01\,s}$

β. Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με $t_1 = NT \Rightarrow N = \frac{t_1}{T} \Rightarrow N = \frac{2}{0,02} \Rightarrow \mathbf{N = 100}$

Άρα στο ελαστικό μέσο θα δούμε 100 κυματικές εικόνες (κύματα).

γ. Η μέγιστη δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F_{max} = DA = m\omega^2 A = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \Rightarrow F_{max} = 10^{-3} \cdot \frac{4\pi^2}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,2 \Rightarrow \mathbf{F_{max} = 20\,N}$$

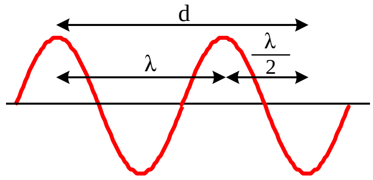
4. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ελαστικής χορδής. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων ενός υλικού σημείου της χορδής από τη θέση ισορροπίας του είναι Δt = 0,5 s. Η οριζόντια απόσταση, κατά μήκος της χορδής, μεταξύ μιας «κορυφής» του κύματος από την μεθεπόμενη «κοιλάδα» είναι d = 0,6 m.

α. να βρείτε τη συχνότητα του κύματος, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β. Αν διπλασιαστεί η συχνότητα των ταλαντώσεων της πηγής, να βρείτε ποια θα είναι, η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας «κορυφής» του κύματος από την πλησιέστερη σ' αυτήν «κοιλάδα».

Λύση

α. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων ενός υλικού σημείου της χορδής από τη θέση ισορροπίας του είναι $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow 0,5 = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 1\,s}$, άρα και **f = 1 Hz**.



Η απόσταση d σύμφωνα με το σχήμα είναι ίση με:

$$d = \lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2d}{3} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 0,4\,m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = \lambda f \Rightarrow$ **υ = 0,4 m/s**.

β. Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο από το ελαστικό μέσο που διαδίδεται. Η αλλαγή της συχνότητας ταλάντωσης της πηγής θα επιφέρει μεταβολή και στο μήκος κύματος αφού η ταχύτητα διάδοσης παραμένει σταθερή. $\upsilon = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{\upsilon}{f'} \Rightarrow \lambda' = \frac{0,4}{2} \Rightarrow \mathbf{\lambda' = 0,2\,m}$.

Η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας «κορυφής» του κύματος από την πλησιέστερη σ' αυτήν «κοιλάδα» είναι ίση με μισό κύμα. Άρα $d' = \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \mathbf{d' = 0,1\,m}$

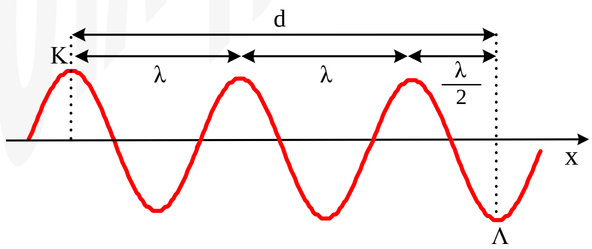
5. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ελαστικής χορδής με συχνότητα f = 10 Hz. Σε κάποια χρονική στιγμή t_1 ένα σημείο Κ του μέσου αποτελεί «όρος» του κύματος και ένα σημείο Λ, που βρίσκεται στην ίδια διεύθυνση διάδοσης, αποτελεί «κοιλάδα». Μεταξύ των σημείων αυτών υπάρχουν δύο ακόμα κοιλάδες του κύματος. Τα σημεία Μ και Ν απέχουν μεταξύ τους d = 50 cm. Να βρείτε:

α. την ταχύτητα διάδοσης του κύματος

β. την χρονική διαφορά με την οποία αρχίζουν να ταλαντώνονται τα δύο σημεία

Λύση

α. Τα σημεία Κ και Λ φαίνονται στο σχήμα όπου σύμφωνα με αυτό απέχουν μεταξύ τους $d = 2\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = 20\,cm}$. Άρα $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 200$ cm/s $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon = 2}$ **m/s**.



β. Το κύμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά άρα: $\upsilon = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,5}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = 0,25\,s}$.

6. Σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδεται αρμονικό κύμα με μήκος κύματος λ = 20 cm. Δύο υλικά σημεία Μ και Ν του μέσου βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Το κύμα διέρχεται πρώτα από το σημείο Μ και μετά από χρονικό διάστημα Δt = 1,7 s από το σημείο Ν. Τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Ν, το σημείο Μ βρίσκεται για πέμπτη φορά στη θετική ακραία θέση ταλάντωσης του. Να υπολογίσετε:

α. την περίοδο του κύματος,

β. την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και

γ. την απόσταση μεταξύ των σημείων Μ και Ν κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Λύση

α. Για πρώτη φορά το σημείο Μ φτάνει στη θετική ακραία θέση $\frac{T}{4}$ μετά την έναρξη της ταλάντωσης του, για δεύτερη φορά θα φτάσει μετά από μία περίοδο και $\frac{T}{4}$ ....

Άρα για πέμπτη φορά θα ισχύει $\Delta t = 4T + \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{17T}{4} \Rightarrow 1,7 = \frac{17T}{4} \Rightarrow \mathbf{T = 0,4s}$

β. Η ταχύτητα διάδοσης είναι $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \upsilon = \frac{20}{0,4} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 50\frac{cm}{s}}$

γ. Η απόσταση είναι εύκολο να βρεθεί από τη σχέση: $d = \upsilon \cdot \Delta t \Rightarrow$ **d = 85 cm**