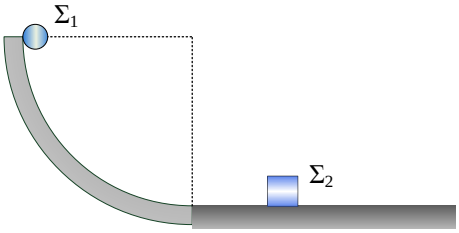
Σαν τον Αχιλλέα με την χελώνα.



Από την κορυφή λείου τεταρτοκυκλίου (R = 5 m) αφήνουμε σώμα Σ_1, μάζας m_1 = 1 kg, αμελητέων διαστάσεων, το οποίο στην βάση του τεταρτοκυκλίου, συναντά οριζόντιο έδαφος. Στο οριζόντιο έδαφος και σε κάποια απόσταση από την βάση του τεταρτοκυκλίου, βρίσκεται ακίνητο, σώμα Σ_2, μάζας m_2. Το σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_2 και μετά την κρούση η ταχύτητα του Σ_1 είναι κατά μέτρο η μισή από αυτή που είχε το Σ_1 λίγο πριν την κρούση με το Σ_2. Μετά την κρούση το Σ_1 επιστρέφει προς το κεκλιμένο επίπεδο ανεβαίνει ως ένα σημείο Α, ακινητοποιείται στιγμιαία, ξανασυγκρούεται με το Σ_2, ξανά και ξανά και ξανά.

α. Στο σημείο Α όπου το Σ_1 σταματά στιγμιαία μετά την κρούση, να δείξετε ότι η δύναμη που δέχεται από το τεταρτοκύκλιο καθώς κατεβαίνει, (έστω $\vec{N}_1$) είναι τριπλάσια από την δύναμη που δέχεται στο ίδιο σημείο την στιγμή της ακινητοποίησης (έστω $\vec{N}_2$) και ανεξάρτητη του σημείου Α.

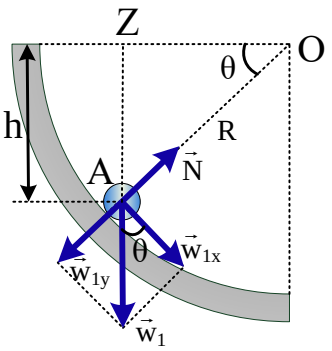
β. Να υπολογίσετε την μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του Σ_1, από την στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι την στιγμή που ακινητοποιείται για πρώτη φορά μετά την κρούση με το Σ_2

γ. Να βρείτε την μάζα m_2 του σώματος Σ_2.

δ. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ οριζοντίου δαπέδου και Σ_2 είναι ίσος με $\mu = \frac{1}{3}$ να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το Σ_2 μέχρι να "τελειώσουν" όλες οι κρούσεις.

Δίνεται g = 10 m/s^2, η απόσταση του Σ_2 από την βάση του τεταρτοκυκλίου είναι τέτοια ώστε κατά την δεύτερη κρούση, το Σ_1 να συναντήσει ακίνητο το Σ_2. Το Σ_1 δεν παρουσιάζει τριβές με το οριζόντιο επίπεδο.

Λύση



α. Σχεδιάζουμε το Σ_1 στην θέση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει το Σ_1 με την αρχική οριζόντια θέση. Κατά την κάθοδο το σώμα περνώντας από την θέση Α έχει κάποια ταχύτητα μέτρου υ και ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = m_1\vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow N_1 - m_1 g\eta\mu\theta = \frac{m_1\upsilon^2}{R} \Rightarrow N_1 = m_1 g\eta\mu\theta + \frac{m_1\upsilon^2}{R} \quad (1).$$

Για να βρούμε την ταχύτητα στην θέση Α, εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από την κορυφή του τεταρτοκυκλίου μέχρι την θέση Α και παίρνουμε: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 = m_1 g h \Rightarrow \upsilon^2 = 2gh$ (2)

Αλλά από το τρίγωνο ΑΟΖ έχουμε h = Rημθ (3)

Τελικά από τις (1), (2), (3) προκύπτει: $N_1 = 3m_1 g ημθ$ (4).

Φτάνοντας το Σ_1 στην ίδια θέση, ακινητοποιημένο (στιγμιαία) πια, θα ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N_2 = m_1 g ημθ$ (5)

Από τις (4) και (5) προκύπτει: $\mathbf{\frac{N_1}{N_2} = 3}$.

β. Θεωρούμε ως επίπεδο βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος.

Η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $U_1 = m_1 gR$.

Το Σ_1 έχει την μισή ταχύτητα μετά την κρούση από αυτή που είχε λίγο πριν.

Για την ταχύτητα του Σ_1 πριν την κρούση, εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε από την κορυφή του τεταρτοκυκλίου μέχρι την βάση.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = m_1 gR \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gR} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1 = 10 \frac{m}{s}}$$

Μετά την κρούση ισχύει για τα μέτρα των ταχυτήτων: $\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{\sqrt{2gR}}{2}$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από την βάση του τεταρτοκυκλίου μέχρι την στιγμή της ακινητοποίησης.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = -m_1 g h_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{2gR}{4} = g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{R}{4}$$

Για την μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας έχουμε:

$$\Delta U = U_{\tau\varepsilon\lambda} - U_{\alpha\rho\chi} = m_1 g h_1 - m_1 gR = m_1 g \frac{R}{4} - m_1 gR \Rightarrow \Delta U = -\frac{3}{4} m_1 gR \Rightarrow \mathbf{\Delta U = -37{,}5\,J}$$

γ. Μετά την ελαστική κρούση με το Σ_2 το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 είναι το μισό της αρχικής ταχύτητας (λίγο πριν την κρούση) και αντιθέτου φοράς (θεωρούμε θετική την φορά προς τα δεξιά).

$$\upsilon_1' = -\frac{\upsilon_1}{2} \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1 = -\frac{\upsilon_1}{2} \Rightarrow 2m_1 - 2m_2 = -m_1 - m_2 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \mathbf{m_2 = 3\,kg}.$$

δ. Σε κάθε κρούση το Σ_1 μεταβιβάζει μέρος της ενέργειας του στο Σ_2. Κάποια στιγμή (θεωρητικά σε άπειρο χρόνο) θα έχει μεταβιβάσει όλη την αρχική του βαρυτική δυναμική ενέργεια στο Σ_2, η οποία θα μετατραπεί σταδιακά σε θερμική λόγω της τριβής.

Το Σ_2 βρίσκεται σε ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έτσι: $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = m_2 g$ και η τριβή $T = \mu N = \mu m_2 g$

Από την Α.Δ.Ε. προκύπτει: $U_1 = Q \Rightarrow m_1 gR = |-Ts| \Rightarrow m_1 gR = \mu m_2 gs \Rightarrow m_1 R = \mu 3 m_1 s \Rightarrow s = \dfrac{R}{3\mu} \Rightarrow$ **s = 5m**

Σημείωση: Το παραπάνω ερώτημα θα μπορούσαμε να το απαντήσουμε και ως εξής.

Η ταχύτητα του Σ_2 μετά από κάθε κρούση με το Σ_1 είναι: $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \dfrac{\upsilon_1}{2}$

Δηλαδή έπειτα από κάθε κρούση το Σ_2 θα έχει την μισή ταχύτητα από αυτή που είχε το Σ_1 πριν την κρούση. Η ταχύτητα (όπως φαίνεται από την σχέση (6)) του Σ_2 για τις συγκεκριμένες μάζες, θα είναι πάντοτε η μισή αυτής που είχε το Σ_1 πριν την κρούση.

Το διάστημα που διανύει το Σ_2 μέχρι την ακινητοποίηση είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 = -\mu m_2 gs \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\upsilon_1^2}{4} = \mu gs \Rightarrow s = \frac{\upsilon_1^2}{8\mu g}$$

Έτσι το διάστημα που διανύει το Σ_2 μετά την πρώτη κρούση είναι: $s_1 = \dfrac{\upsilon_1^2}{8\mu g}$

Το διάστημα που διανύει το Σ_2 μετά την δεύτερη κρούση είναι: $s_2 = \dfrac{\upsilon_1^2}{32\mu g}$

……

Το διάστημα που διανύει το Σ_2 μετά την ν-οστή κρούση είναι: $s_\nu = \dfrac{\upsilon_1^2}{4^\nu \cdot 2\mu g}$ με ν = 1, 2, 3, …

Το συνολικό διάστημα είναι: $s = s_1 + s_2 + ... + s_\nu = \dfrac{\upsilon_1^2}{2\mu g}\left(\dfrac{1}{4^1} + \dfrac{1}{4^2} + ... + \dfrac{1}{4^\nu}\right)$ (7)

Η παραπάνω σχέση αποτελεί άθροισμα ν όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = \dfrac{1}{4}$ και λόγο δύο διαδοχικών όρων $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

Το άθροισμα των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, με $|\lambda| < 1$,

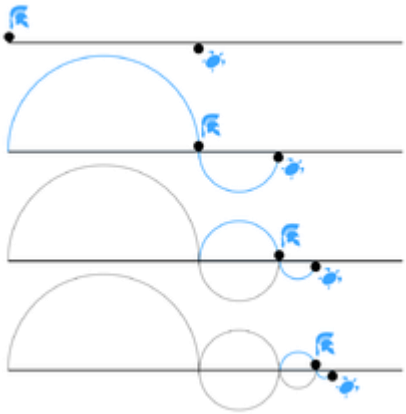
είναι: $s = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο η παρένθεση της σχέσης (7) δίνει $s' = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$ (8)

Άρα από (7), (8) $\Rightarrow s = \dfrac{\upsilon_1^2}{2\mu g}\dfrac{1}{3} \xrightarrow{\upsilon_1=\sqrt{2gR}} s = \dfrac{2gR}{2\mu g \cdot 3} \Rightarrow s = \dfrac{R}{3\mu} \Rightarrow$ **s = 5m**.

Θυμίζω παρακάτω το παράδοξο

Ο Αχιλλέας και η χελώνα



Έχουμε δύο δρομείς, τον Αχιλλέα, που τρέχει γρήγορα, και τη χελώνα, που πάει πιο αργά από τον Αχιλλέα, οι οποίοι συμμετέχουν σε αγώνα δρόμου. Μιας και η χελώνα είναι πιο αργή της χαρίζεται ένα προβάδισμα από τον Αχιλλέα, το οποίο όμως φαίνεται να επιδρά καθοριστικά στο να νικά πάντα η χελώνα, όσο μικρό κι αν είναι το προβάδισμα και όσο μεγάλη και να είναι η απόσταση που θα διανύσουν στον αγώνα δρόμου.

Για να προσπεράσει ο Αχιλλέας τη χελώνα πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο από το οποίο η χελώνα ξεκίνησε. Όμως αυτό δεν πρόκειται να γίνει ποτέ όσο η χελώνα συνεχίζει να προχωρά, όσο αργή κι αν είναι. Ώσπου να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση αυτή, η χελώνα θα έχει προχωρήσει λίγο πιο πέρα. Έτσι ο Αχιλλέας υποχρεούται να διανύσει κι άλλο διάστημα, ως τη νέα θέση της χελώνας. Ώσπου να διατρέξει το νέο αυτό διάστημα, η χελώνα θα έχει προχωρήσει κι άλλο, στον χρόνο που ο Αχιλλέας χρειάζεται για να φτάσει στο προηγούμενο σημείο.

Το διάστημα που τους χωρίζει μπορεί να γίνεται ολοένα και πιο μικρό, όμως ποτέ ο γρήγορος Αχιλλέας δε μπορεί να φτάσει την αργή χελώνα, όσο ο χώρος μπορεί και διαιρείται σε όλο και πιο μικρά μέρη.