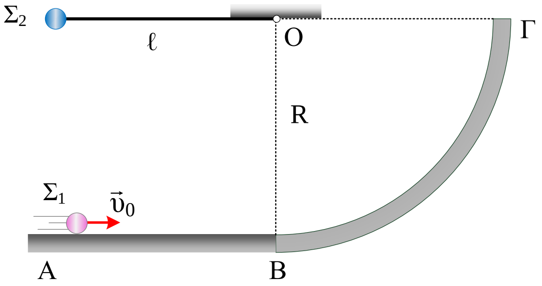
Με μία ώθηση πάμε πιο ψηλά.



Σώμα Σ_1 μάζας m_1 βάλλεται από ένα σημείο λείου οριζοντίου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου υ_0 = $2\sqrt{5}$ m/s. Στην πορεία του συναντά λείο τεταρτοκύκλιο ακτίνας R και φτάνει οριακά στο χείλος του. Το σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 0,6 kg βρίσκεται δεμένο στο κάτω άκρο νήματος μήκους ℓ = R. Το πάνω άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο που βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου μέρος του οποίου αποτελεί το τεταρτοκύκλιο. Το σφαιρίδιο μπορεί να διαγράφει τροχιά μες το τεταρτοκύκλιο έτσι ώστε το Σ_2 να εφάπτεται με αυτό. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο από την οριζόντια θέση το Σ_2 και αυτό αφού περάσει στην περιοχή του τεταρτοκυκλίου συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το Σ_1 την ώρα που αυτό έχει ήδη αρχίσει να κατέρχεται. Το Σ_2, μετά την κρούση περνά από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του, δεχόμενο από το νήμα δύναμη μέτρου T = 8,4 N, έχοντας ταχύτητα μέτρου υ, ενώ κατά την αιώρηση του δε ξεπερνά τη θέση της κρούσης. Να βρείτε:

α. Το μήκος του νήματος

β. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων μετά την κρούση

γ. Τη δύναμη που ασκεί το Σ_1 στο οριζόντιο επίπεδο κατά την κίνηση του σε αυτό

δ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ_1 τη στιγμή ελάχιστα πριν την εγκατάλειψη του τεταρτοκυκλίου.

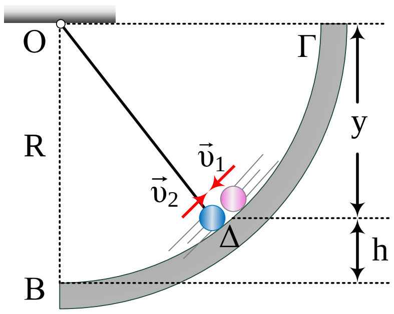
ε. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ_1 όταν μετά την εγκατάλειψη του κεκλιμένου, βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους πάνω από το τεταρτοκύκλιο που θα φτάσει.

Δίνεται g = 10 m/s^2. Τα σώματα θεωρούνται σημειακά και οι αντιστάσεις του αέρα αμελητέες. Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από τα A και B.

Λύση

α. Το Σ_1 φτάνει ως το χείλος του τεταρτοκυκλίου Γ, οπότε $\upsilon_\Gamma = 0$.

$$K_\Gamma - K_A = W_w \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -m_1 g R \Rightarrow R = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow \mathbf{R = 1\ m = \ell}.$$



β. Έστω η κρούση γίνεται σε ένα σημείο Δ του τεταρτοκυκλίου, όπου το Σ_1 έχει κατέρθει κατά y και το Σ_2 βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το επίπεδο AB.

Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow T - m_2 g = \frac{m_2\upsilon^2}{\ell} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{T\ell}{m_2} - g\ell} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{8,4\cdot 1}{0,6} - 10\cdot 1}\,\frac{m}{s} \Rightarrow$$

υ = 2 m/s.

ΘΜΚΕ από τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι το κατώτερο σημείο της τροχιάς.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m_2υ^2 - 0 = m_2gh \Rightarrow h = \frac{υ^2}{2g} \Rightarrow \mathbf{h = 0,2\ m}$$

Τα δύο σώματα τη στιγμή της κρούσης θα έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων αφού ξεκινούν από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο (αυτό που ανήκει η ΟΓ) και έχουν μέχρι τη θέση κρούσης κατέρθει κατά $y = R - h \Rightarrow$ **y = 0,8 m**.

ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι τη θέση της κρούσης:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}mυ^2 - 0 = mgy \Rightarrow υ = \sqrt{2gy} \Rightarrow υ = 4\ m/s.$$ Άρα **υ1 = υ2 = υ = 4 m/s.**

γ. Εφόσον το $Σ_2$ κατά τη διάρκεια των μετέπειτα αιωρήσεων δεν ξεπερνά το ύψος της κρούσης θα έχουμε $υ'_2 = 0$. Ισχύει (θεωρώ θετική τη φορά της $\vec{υ}_2$):

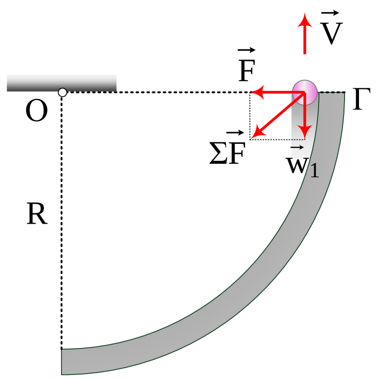
$$υ'_2 = 0 \Rightarrow \frac{-2m_1υ_1 + (m_2 - m_1)υ_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow 2m_1υ_1 = (m_2 - m_1)υ_2 \Rightarrow 2m_1 = m_2 - m_1 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \mathbf{m_1 = 0,2\ kg}.$$

Επίσης για την κίνηση στο επίπεδο ΑΒ: $Σ\vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = w_1 \Rightarrow N = m_1g \Rightarrow$ **N = 2 N**.

Άρα το $Σ_1$ ασκεί στο δάπεδο δύναμη ίδιου μέτρου **N′ = 2 N** και αντίθετης φοράς.

δ. Για την ελαστική κρούση έχουμε: $υ_1 + υ'_1 = υ_2 + υ'_2 \Rightarrow -4\frac{m}{s} + υ'_1 = 4\frac{m}{s} + 0 \Rightarrow \mathbf{υ'_1 = 8\frac{m}{s}}$

ΘΜΚΕ: Από σημείο της κρούσης μέχρι το άκρο Γ για το $Σ_1$:



$$K_Γ - K_Δ = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m_1V^2 - \frac{1}{2}m_1υ'^2_1 = -m_1gy \Rightarrow V = \sqrt{υ'^2_1 - 2gy} \Rightarrow$$

$$\mathbf{V = 4\sqrt{3}\ m/s}$$

Στο σημείο Γ το $Σ_1$ δέχεται το βάρος του και την δύναμη από το τεταρτοκύκλιο $\vec{F}$.

$$Σ\vec{F}_R = \vec{F}_κ \Rightarrow F = \frac{m_1V^2}{R} \Rightarrow \mathbf{F = 9,6\ N}.$$

Άρα $\frac{d\vec{p}}{dt} = Σ\vec{F} = \vec{F} + \vec{w}_1 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \sqrt{F^2 + w_1^2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \sqrt{9,6^2 + 4}\ N \Rightarrow \mathbf{\frac{dp}{dt} = \sqrt{96,16}\ N}$

ε. Έστω H το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το $Σ_1$ πάνω από το σημείο Γ.

Με ΘΜΚΕ προκύπτει: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1V^2 = m_1gH \Rightarrow H = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow$ **H = 2,4 m.**

Ομοίως ΘΜΚΕ για να βρούμε την ταχύτητα στο μισό του μέγιστου ύψους.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m_1V_1^2 - \frac{1}{2}m_1V^2 = m_1g\frac{H}{2} \Rightarrow V_1^2 - V^2 = -gH \Rightarrow V_1 = \sqrt{V^2 - gH} \Rightarrow \mathbf{V_1 = \sqrt{24}\frac{m}{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = Σ\vec{F} \cdot \vec{V}_1 = w_1 \cdot V_1 \cdot συν180^o \Rightarrow \mathbf{\frac{dK}{dt} = -4\sqrt{6}\frac{J}{s}}$$