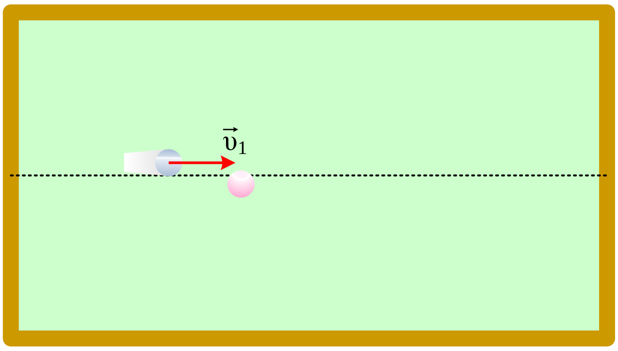
Κρούσεις στο τραπέζι του μπιλιάρδου.



Δύο απολύτως λείες και ελαστικές σφαίρες (ίδιου όγκου διαφορετικής μάζας) είναι τοποθετημένες στο τραπέζι ενός μπιλιάρδου (του οποίου η κάτοψη φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Οι κρούσεις με τις σπόντες είναι και αυτές ελαστικές. Τοποθετούμε τη σφαίρα Σ_2 σε σημείο που βρίσκεται σχεδόν πάνω στη μεσοκάθετο της μικρής πλευράς. Σχεδόν από την ίδια ευθεία αλλά εκατέρωθεν αυτής εκτοξεύουμε την Σ_1 με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ έτσι ώστε να συγκρουστεί μη κεντρικά και ελαστικά με την Σ_2.

Μετά την κρούση, οι δύο σφαίρες αφού ανακλαστούν στις σπόντες περνάνε σχεδόν από το ίδιο σημείο (το θεωρούμε ίδιο) της μεσοκαθέτου (σε διαφορετικές στιγμές όμως). Η μεταβολή της ορμής της Σ_1 στην σπόντα έχει μέτρο p_1', όπου p_1' το μέτρο της ορμής της Σ_1 μετά την κρούση με τη Σ_2. Να βρείτε:

α. τις γωνίες θ και φ μετά την κρούση των δύο σφαιρών

β. την μάζα m_2, αν η Σ_1 έχει μάζα $m_1 = 0,4$ kg.

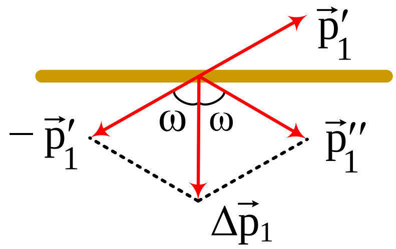
γ. την κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση, αν η Σ_1 είχε ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2\sqrt{3}$ m/s πριν την κρούση της με την Σ_2.

δ. με ποια χρονική διαφορά τέμνουν οι δύο σφαίρες την μεσοκάθετο στη μικρή πλευρά του μπιλιάρδου μετά την κρούση (να θεωρήσετε ότι η μικρή πλευρά έχει μήκος 1,7 m).

Σημείωση: Οι διαστάσεις μιας μπάλας μπιλιάρδου είναι 61,5 mm (διάμετρος) και έχουν βάρος περίπου 290 g, οπότε και οι τιμές είναι εκεί γύρω ώστε τα νούμερα να είναι ρεαλιστικά. Οι δε διαστάσεις ενός γαλικού μπιλιάρδου είναι συνήθως (προφανώς ποικίλουν) είναι: (3,10 m)x(1,70 m) (εξωτερικές διαστάσεις), οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι δύο σφαίρες ξεκινάνε (μετά την κρούση) από το ίδιο σημείο και τέμνουν ξανά την μεσοκάθετο (οι τροχιές των Σ_1 και Σ_2) στο ίδιο σημείο.

Λύση

α. Αν $\vec{p}_1'$ και $\vec{p}_1''$ οι ορμές που έχει η Σ1 μετά την ελαστική κρούση με την σπόντα θα ισχύει: $|\vec{p}_1'|=|\vec{p}_1'|=p_1'$, αφού η κρούση με την σπόντα είναι ελαστική και δεν αλλάζει η κινητική ενέργεια της Σ1, άρα ούτε το μέτρο της ορμής της.

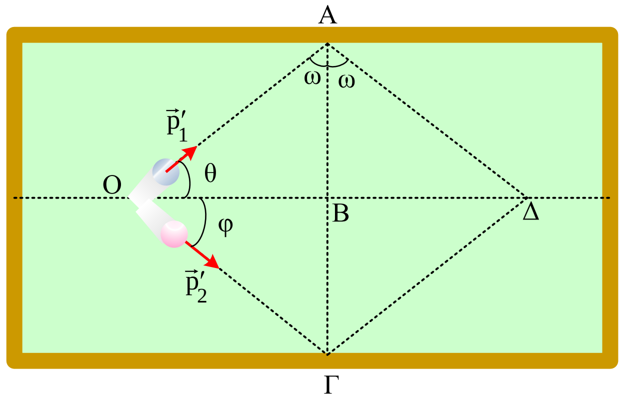


Για το μέτρο της μεταβολής της ισχύει: $\Delta p_1=\sqrt{p_1'^2+p_1''^2+2p_1'p_1''\sigma\upsilon\nu 2\omega}=\sqrt{p_1'^2+p_1'^2+2p_1'p_1'\sigma\upsilon\nu 2\omega}\Rightarrow$

$$p_1'=\sqrt{2p_1'^2+2p_1'^2\sigma\upsilon\nu 2\omega}\Rightarrow 3p_1'^2-2p_1'^2=2p_1'^2\sigma\upsilon\nu\omega\Rightarrow\sigma\upsilon\nu 2\omega=-\frac{1}{2}\Rightarrow\omega=60^o$$

Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ: $\theta = 30^o$.

Μετά την κρούση μεταξύ τους και την κρούση με τις σπόντες οι δύο σφαίρες διέρχονται από το ίδιο σημείο της μεσοκαθέτου. Τα δύο τρίγωνα (ΟΑΔ και ΟΓΔ) είναι ισοσκελή με μία πλευρά κοινή ίδιο και γωνίες πρόσπτωσης ίσες με τις γωνίες ανάκλασής του θα είναι ίσα.



Συνεπώς **θ = φ = 30º**.

β. Το σύστημα είναι μονωμένο, οπότε η ορμή διατηρείται στους άξονες x′x και y′y.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi,y}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,y}\Rightarrow\vec{0}=\vec{p}_{1,y}'+\vec{p}_{2,y}'\Rightarrow\vec{p}_{1,y}'=-\vec{p}_{2,y}'\Rightarrow p_{1,y}'=p_{2,y}'\Rightarrow p_1'\eta\mu\theta=p_2'\eta\mu\varphi\Rightarrow p_1'=p_2'\ (1)$$

Από την ΑΔΟ: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow\vec{p}_1=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'\Rightarrow p_1^2=p_1'^2+p_2'^2+2p_1'p_2'\sigma\upsilon\nu 60\Rightarrow p_1^2=3p_2'^2\ (2)$

Το μέτρο της ορμής και της κινητικής ενέργειας συνδέονται με τη σχέση: $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}\frac{m^2\upsilon^2}{m}\Rightarrow K=\frac{p^2}{2m}$

Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$K_1=K_1'+K_2'\Rightarrow\frac{p_1^2}{2m_1}=\frac{p_1'^2}{2m_1}+\frac{p_2'^2}{2m_2}\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}\frac{3p_2'^2}{m_1}=\frac{p_2'^2}{m_1}+\frac{p_2'^2}{m_2}\Rightarrow\frac{3}{m_1}-\frac{1}{m_1}=\frac{1}{m_2}\Rightarrow m_2=\frac{m_1}{2}\Rightarrow \mathbf{m_2 = 0,2\ kg}.$$

γ. Από την (2) έχουμε: $p_1^2=3p_2'^2\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{m_1\upsilon_1}{\sqrt{3}m_2}\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{2m_2\upsilon_1}{\sqrt{3}m_2}\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{2\upsilon_1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\upsilon_2'=\frac{2\cdot2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\frac{m}{s}\Rightarrow\upsilon_2'$ **= 4 m/s**.

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 \Rightarrow K_2' = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 16\,J \Rightarrow \mathbf{K_2' = 1,6\,J}$$

δ. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\boldsymbol{\upsilon_1'}$ **= 2 m/s.**

Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισόπλευρο άρα (ΟΑ) = (ΑΓ) = 1,7 m. Η απόσταση d που διανύει κάθε σδαίρα μέχρι το σημείο τομής της τροχιάς τους με την μεσοκάθετο είναι: d = 2(ΟΑ) = 3,4 m.

Άρα $\Delta t_1 = \dfrac{d}{\upsilon_1'} \Rightarrow$ **Δt_1 = 1,7 s** και $\Delta t_2 = \dfrac{d}{\upsilon_2'} \Rightarrow$ **Δt_2 = 0,85 s**

Άρα το πέρασμα από το σημείο Δ γίνεται με χρονική διαφορά $\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 \Rightarrow$ **Δt = 0,85 s**.

Σημείωση: Η απόσταση ΟΔ είναι ίση με: (ΟΔ) = 2(ΟΒ) = 2(ΟΑ)συν30^o ≈ 2,94 m < 3,1 m (της μεγάλης πλευράς. Δηλαδή ίσα που μας παίρνει!!!