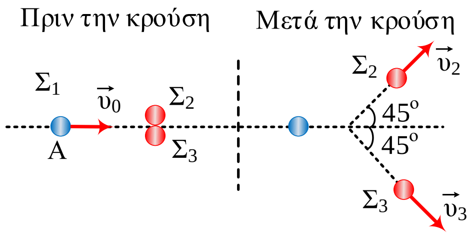
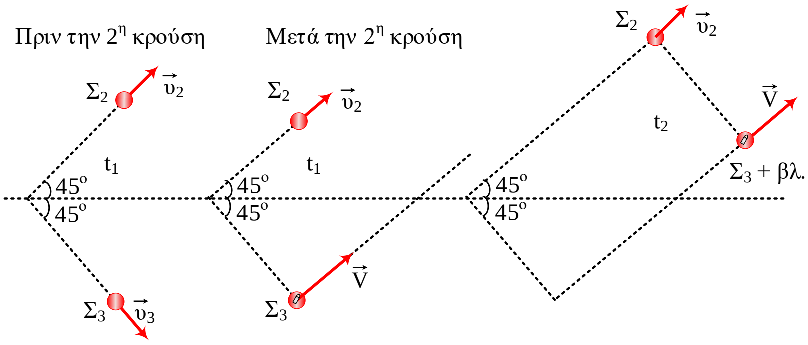
Από πλάγια κρούση σε πλάγια κρούση.



Τρεις λείες σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3, μάζας m = 1 kg και ίδιας ακτίνας η καθεμία, βρίσκονται ακίνητες επάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, με τις σφαίρες Σ_2 και Σ_3 να εφάπτονται μεταξύ τους. Κάποια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε τη σφαίρα Σ_1 με ταχύτητα υ_0, μέτρου $10\sqrt{2}$ m/s, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x′x, ο οποίος διέρχεται από το σημείο επαφής των σφαιρών Σ_2 και Σ_3, όπως απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα. Η σφαίρα Σ_1 συγκρούεται ελαστικά με τις σφαίρες Σ_2 και Σ_3. Μετά την κρούση οι ταχύτητες υ_2 και υ_3 των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα σχηματίζουν γωνία 45° η καθεμία με τον άξονα x′x, ενώ η Σ_1 παραμένει πάνω στον άξονα x′x.

α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων υ_2 και υ_3 των σφαιρών Σ_2 και Σ_3 αντίστοιχα.

β. Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 ακινητοποιείται.



Θεωρούμε ως $t_0 = 0$ τη στιγμή της $1^{ης}$ κρούσης. Την στιγμή $t_1 = 1$ s, η σφαίρα Σ_3 συγκρούεται με βλήμα μάζας m = 0,2 kg πλαστικά με αποτέλεσμα το συσσωμάτωμα να κινηθεί κάθετα στην αρχική διεύθυνση της Σ_3 (παράλληλα με τη Σ_2) και τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s, να φτάσει στην ελάχιστη απόσταση με τη Σ_2. Να βρείτε:

γ. το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

δ. το μέτρο της ορμής του βλήματος πριν την κρούση.

ε. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του βλήματος.

Οι σφαίρες έχουν αμελητέες διαστάσεις, και οι κρούσεις έχουν αμελητέα διάρκεια.

Λύση

α. Από Α.Δ.Ο. στον άξονα y′y έχουμε: $\vec{p}_{y,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{y,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = m\upsilon_{2,y} - m\upsilon_{3,y} \Rightarrow \upsilon_2\eta\mu 45 = \upsilon_3\eta\mu 45 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3$ (1)

Από Α.Δ.Ο. στον άξονα x′x έχουμε:

$$\vec{p}_{x,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{x,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + m\upsilon_{2,x} + m\upsilon_{3,x} \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\sigma\upsilon\nu 45 + \upsilon_2\sigma\upsilon\nu 45 \Rightarrow \upsilon_0 - \upsilon_1 = \sqrt{2}\upsilon_2 \qquad (2)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα: $K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

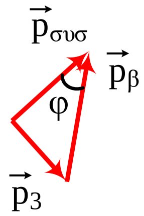
$$\upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow (\upsilon_0 - \upsilon_1)(\upsilon_0 + \upsilon_1) = 2\upsilon_2^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sqrt{2}\upsilon_2(\upsilon_0 + \upsilon_1) = 2\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_0 + \upsilon_1 = \sqrt{2}\upsilon_2 \qquad (3)$$

(2) + (3) $\Rightarrow 2\upsilon_0 = 2\sqrt{2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ **υ_2 = 10 m/s = υ_3.**

β. Από την (2) ή από την (3) με αντικατάσταση προκύπτει: **υ_1 = 0.**

γ. Μετά την δεύτερη κρούση το συσσωμάτωμα κινείται παράλληλα στην διεύθυνση με το $Σ_2$. Ελάχιστη απόσταση θα έχουν όταν το συσσωμάτωμα βρεθεί «απέναντι» από το $Σ_2$, δηλαδή όταν η ευθεία που τα ενώνει είναι παράλληλη στην αρχική πορεία του $Σ_3$. Άρα το $Σ_2$ και το συσσωμάτωμα απέχουν το ίδιο από την αρχική ευθεία κίνησης του $Σ_3$. Συνεπώς:

$$s_2 = s_{συσ} \Rightarrow υ_2 t_2 = V(t_2 - t_1) \Rightarrow V = \frac{υ_2 t_2}{t_2 - t_1} \Rightarrow V = \frac{10 \cdot 3}{3-1}\frac{m}{s} \Rightarrow \mathbf{V = 15\ m/s}.$$

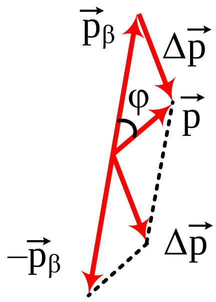


δ. Σύμφωνα με το σχήμα του τριγώνου των ορμών ισχύει:

$$p_β = \sqrt{p_3^2 + p_{συσ}^2} \Rightarrow p_β = \sqrt{100+324}\,\frac{kg \cdot m}{s} \Rightarrow \mathbf{p_β = \sqrt{424}\,\frac{kg \cdot m}{s}}$$

ε. Η γωνία φ έχει συνημίτονο: $συνφ = \dfrac{p_{συσ}}{p_β}$

Η αρχική και η τελική ορμή του βλήματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Η τελική ορμή του βλήματος έχει μέτρο: p = mV ⇒ **p = 3 kg·m/s**.

Ισχύει: $Δp = \sqrt{p_β^2 + p^2 + 2p_β p συν(π - φ)} = \sqrt{p_β^2 + p^2 - 2p_β p συνφ} =$

$$\sqrt{p_β^2 + p^2 - 2p_β p \frac{p_{συσ}}{p_β}} = \sqrt{p_β^2 + p^2 - 2pp_{συσ}} = \sqrt{424 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 18}\,\frac{kg \cdot m}{s} =$$

$$\sqrt{325}\,\frac{kg \cdot m}{s} \Rightarrow \mathbf{Δp = 5\sqrt{13}\,\frac{kg \cdot m}{s}}$$