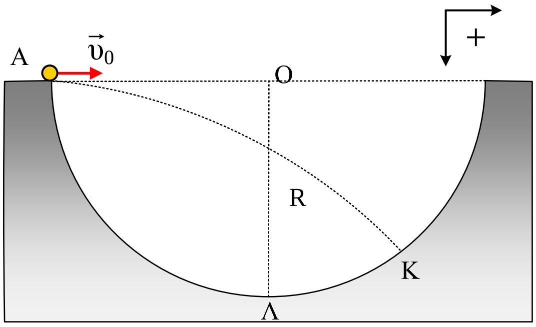
Μια βολή στο ημικύκλιο.



Από ένα σημείο Α(0, 0), του οριζοντίου επιπέδου εκτοξεύουμε μικρή σφαίρα Σ, μάζας m = 0,3 kg. Η σφαίρα κάνει οριζόντια βολή σε ημικύκλιο ακτίνας $R = 10\sqrt{3}$ m. Η μικρή σφαίρα χτυπά το ημικύκλιο στο σημείο Κ όπου η ακτίνα ΟΚ σχηματίζει με την κατακόρυφη ακτίνα ΟΛ γωνία θ = 30°. Να βρείτε:

α. την βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος ελάχιστα πριν χτυπήσει στο ημικύκλιο.

β. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ με την οποία η σφαίρα εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.

γ. την κινητική ενέργεια την στιγμή που η τροχιά της βολή, τέμνει την κατακόρυφη ακτίνα ΟΛ.

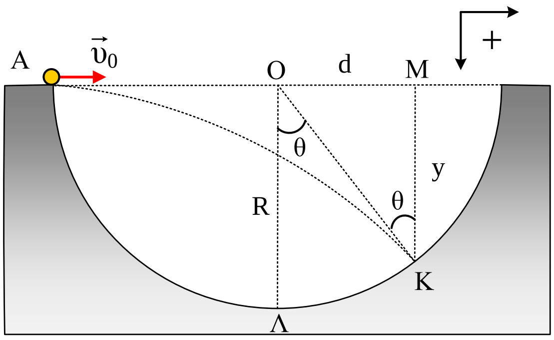
δ. το μέσο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας για όλη τη διάρκεια της οριζόντιας βολής

Θεωρούμε επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που περνά από το Ο.

Δίνεται $g = 10$ m/s^2. Οι τριβές από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Λύση

α. Από το τρίγωνο ΟΚΜ προκύπτει ότι: $ημθ = \frac{(OM)}{(OK)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{R} \Rightarrow d = \frac{R}{2} \Rightarrow \mathbf{d = 5\sqrt{3}\,m}$.



Επίσης $συνθ = \frac{(KM)}{(OK)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{R} \Rightarrow y = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathbf{y = 15\,m}$.

Επομένως η βαρυτική δυναμική ενέργεια στη θέση αυτή είναι:

$U_K = -mgy \Rightarrow U_K = -0{,}3 \cdot 10 \cdot 15$ J $\Rightarrow$ **$U_K = -45$ J**.

β. Η τετμημένη του σημείου Κ είναι:

$$x = R + d = \frac{3R}{2} \Rightarrow \mathbf{x = 15\sqrt{3}\,m}$$

Για την οριζόντια βολή ισχύουν οι σχέσεις: $x = \upsilon_0 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{x}{\upsilon_0}$ (1) και $y = \frac{1}{2} g \Delta t^2$ (2)

Συνδυάζουμε τις (1) και (2) και παίρνουμε: $y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} x^2$ (4)

και από την (4) $\Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{g}{2y}} \cdot x \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{10}{30}} 15\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \Rightarrow$ **υ_0 = 15 m/s**.

γ. Την στιγμή που η τροχιά της βολής τέμνει την κατακόρυφη ακτίνα ισχύει: $x_1 = R$.

Η (4) για $x_1 = R$, δίνει: $y_1 = \frac{g}{2\upsilon_1^2} R^2 \Rightarrow y_1 = \frac{10}{2 \cdot 225} 300\,m \Rightarrow \mathbf{y_1 = \frac{20}{3}\,m}$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από την θέση Α στη θέση Ζ και έχω:

$$K_1 - K_0 = \Sigma W = W_w \Rightarrow K_1 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = mgy_1 \Rightarrow K_1 = 33,75\,J + 20\,J \Rightarrow \mathbf{K_1 = 53,75\,J}\,.$$

δ. Η χρονική διάρκεια της βολής δίνεται από τη σχέση $\Delta t = \frac{x}{\upsilon_0} \Rightarrow \Delta t = \frac{15\sqrt{3}}{15} s \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \sqrt{3}\,s}$

Από το Α → Κ η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$K_0 + U_0 = K_2 + U_2 \Rightarrow K_2 - K_0 = -U_2 \Rightarrow \Delta K = -(-mgy) \Rightarrow \Delta K = 45$ J.

Άρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{45}{\sqrt{3}} \frac{J}{s} \Rightarrow \mathbf{\frac{\Delta K}{\Delta t} = 15\sqrt{3}\,\frac{J}{s}}\,.$$