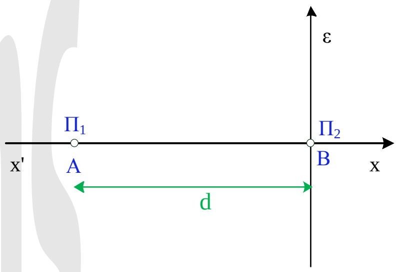
Γεωμετρική και τριγωνομετρική συμβολή.



Σε μία ήρεμη επιφάνεια, σε μία νοητή ευθεία x'x, βρίσκονται δύο πηγές $Π_1$ και $Π_2$, στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Οι δύο πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και αρχίζουν την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, να ταλαντώνονται με εξίσωση $y = 0{,}5ημ10πt$ (y σε cm). Η ευθεία ε είναι κάθετη στην x'x και τέμνει αυτή στο σημείο Β. Δύο σημεία Κ και Λ της ευθείας ε, απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d_1 = 10$ cm και αρχίζουν να ταλαντώνονται όταν οι πηγές διανύσουν απόσταση 2,5 cm. Μόλις οι πηγές εκτελέσουν 2 πλήρεις ταλαντώσεις μετά την χρονική στιγμή t_1, η ενέργεια ταλάντωσης των Κ, Λ τετραπλασιάζεται.

α. Ποιες οι αποστάσεις r_1, r_2 του σημείου Κ από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα;

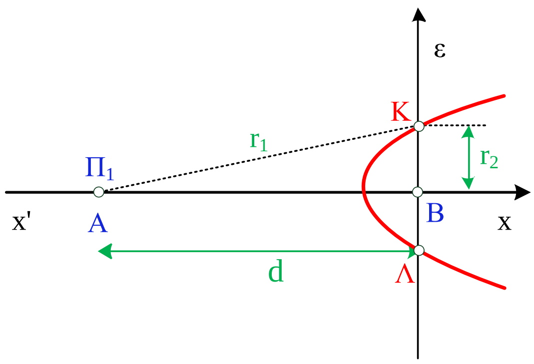
β. Πόσα σημεία της ευθείας ε ταλαντώνονται με πλάτος 1 cm (εκτός του σημείου Β);

γ. Αν Ρ είναι το σημείο που αρχίζει πρώτο, να ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος, με ποια χρονική διαφορά τα σημεία Κ και Ρ αποκτούν ίσες ενέργειες ταλάντωσης;

δ. Για πόσο χρονικό διάστημα το Κ έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης από το Ρ;

ε. Η υπερβολή που περνά από τα Κ και Λ τέμνει την ευθεία x'x στο σημείο Τ. Το πιο κοντινό σημείο στην μεσοκάθετο και αριστερά αυτής που ταλαντώνεται με ενέργεια διπλάσια από αυτή των πηγών βρίσκεται στο Σ. Ποιο το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΤΣ;

Λύση



α. Τα σημεία Κ και Λ που βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε, πρέπει να βρίσκονται εκατέρωθεν της $Π_2$ και να ισαπέχουν από αυτή αφού αρχίζουν να ταλαντώνονται ταυτόχρονα.

Παρατηρούμε ότι η απόσταση που έχουν διανύσει οι πηγές μέχρι τα κύματα που παράγουν να φτάσουν στα Κ και Λ είναι 2,5 cm = 5·0,5 cm = 5A, δηλαδή ο χρόνος ταλάντωσης τους είναι ίσος με $t_1 = T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ όπου T η περίοδος ταλάντωσης των πηγών.

Η απόσταση r_2 είναι ίση με $r_2 = \frac{d_1}{2} \Rightarrow \mathbf{r_2 = 5\,cm}$

Η απόσταση (ΒΚ) είναι ίση με $\upsilon = \frac{(BK)}{\Delta t_{BK}} \Rightarrow (BK) = \upsilon \cdot \Delta t_{BK} = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{5T}{4} = \frac{5\lambda}{4}$

Αλλά $d_1 = (K\Lambda) = 2(BK)$, οπότε $d_1 = 2\frac{5\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{2d_1}{5} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 4\,cm}$.

Όταν φτάνει στο σημείο Κ (ή Λ) το κύμα από την πηγή Π_2, αυτό ταλαντώνεται με πλάτος ίσο με αυτό των πηγών δηλαδή Α. Μετά την έλευση και του δευτέρου κύματος η ενέργεια ταλάντωσης τετραπλασιάζεται δηλαδή $E' = 4E \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = 4\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A' = 2A$, δηλαδή στα σημεία Κ και Λ έχουμε ενισχυτική συμβολή.

Για να έχουμε όμως συμβολή θα πρέπει να φτάσει και το δεύτερο κύμα και σύμφωνα με την εκφώνηση χρειάζεται επιπλέον οι πηγές να εκτελέσουν 2 πλήρεις ταλαντώσεις μετά την χρονική στιγμή t_1, για να αρχίσει η συμβολή. Άρα το δεύτερο κύμα φτάνει τη στιγμή $t_2 = t_1 + 2T \Rightarrow t_2 = \frac{13T}{4}$.

Η απόσταση r_2 είναι: $r_1 = \upsilon t_2 = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{13T}{4} = \frac{13\lambda}{4} \Rightarrow \mathbf{r_1 = 13\,cm}$.

β. Παρατηρούμε ότι το πλάτος 1 cm είναι ίσο με 2Α.

Άρα θέλουμε να βρούμε πόσες υπερβολές ενίσχυσης τέμνουν την ευθεία ε.

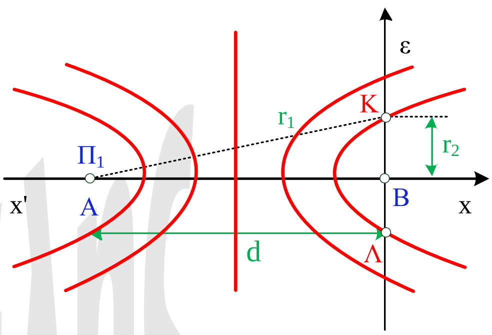
Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο άρα: $r_1^2 = r_2^2 + d^2 \Rightarrow \mathbf{d = 12\,cm}$.

Για ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = N\lambda \\ x_1 + x_2 = d \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_1 = N\lambda + d \Rightarrow x_1 = 2N + 6$$ με x_1 σε cm.

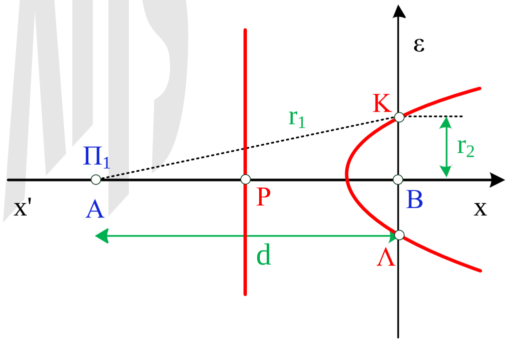
Η απόσταση d_1 παίρνει τιμές $0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < 2N + 6 < 12 \Rightarrow -3 < N < 3$

Άρα λοιπόν πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ θα έχουμε 2 υπερβολές ενίσχυσης αριστερά της μεσοκαθέτου, 2 υπερβολές ενίσχυσης δεξιά της μεσοκαθέτου και την μεσοκάθετο. Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι 4 σημεία της ευθείας ε (εκτός του Β) ταλαντώνονται με πλάτος 1 cm.



γ. Τα σημεία Κ και Ρ αποκτούν ίσες ενέργειες ταλάντωσης από την στιγμή που σ' αυτά θα γίνει η συμβολή και μετά.

Το σημείο Ρ είναι το πρώτο σημείο που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος (ενισχυτική συμβολή), άρα απέχει την ελάχιστη απόσταση και από τις δύο πηγές. Συνεπώς το σημείο Ρ βρίσκεται στο μέσον



του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_P = \dfrac{\frac{d}{2}}{\upsilon} = \dfrac{d}{2\upsilon}$.

Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών έχουμε ω = 10π rad/s $\Rightarrow$ **T = 0,2 s**.

Η ταχύτητα είναι $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 20\dfrac{cm}{s}}$. Άρα $t_P = \dfrac{12}{2\cdot 20}\,s \Rightarrow \mathbf{t_P = 0,3\,s}$.

Η συμβολή στο Ρ αρχίζει την χρονική στιγμή t_P (αφού τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα) ενώ στο σημείο Κ αρχίζει την χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{13T}{4} \Rightarrow \mathbf{t_2 = 0,65\,s}$.

Άρα η χρονική διαφορά είναι $\Delta t = t_2 - t_P \Rightarrow$ **Δt = 0,35 s**.

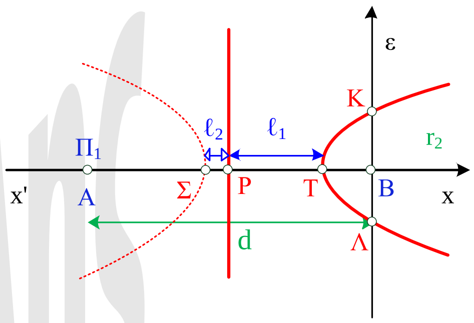
δ. Το σημείο Ρ είναι το πρώτο σημείο σ' όλη την επιφάνεια που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος, δεν είναι όμως και το πρώτο που αρχίζει να ταλαντώνεται. Έτσι πριν την χρονική στιγμή t_P, παραμένει ακίνητο.

Το σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{5T}{4} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 0,25\,s}$.

Οπότε το σημείο Κ έχει μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης από το Ρ από την στιγμή που φτάνει το πρώτο κύμα σ' αυτό μέχρι την στιγμή που το Ρ ξεκινά να ταλαντώνεται (στο Ρ τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα οπότε έχουμε ενισχυτική συμβολή).

Άρα $\Delta t' = t_P - t_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta t' = 0{,}05\,s}$.

ε. Το σημείο Τ ανήκει στην ίδια υπερβολή ενίσχυσης με το Κ, άρα θα έχει την ίδια διαφορά αποστάσεων από τις πηγές με το Κ (και το Λ).



$$\Delta r_T = \Delta r_K \Rightarrow (TA) - (TB) = r_1 - r_2 \Rightarrow \frac{d}{2} + \ell_1 - (\frac{d}{2} - \ell_1) = 8\,cm \Rightarrow \mathbf{\ell_1 = 4\,cm}$$
.

Το σημείο Σ βρίσκεται αριστερά της μεσοκαθέτου και έχει ενέργεια ταλάντωσης διπλάσια από αυτή των πηγών.

$$E_\Sigma = 2E \Rightarrow \frac{1}{2}DA_\Sigma^2 = 2\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A_\Sigma = \sqrt{2}A \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi\Delta r_\Sigma}{\lambda}\right| = \sqrt{2}A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi\Delta r_\Sigma}{\lambda} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi|\Delta r_\Sigma|}{\lambda} = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow |\Delta r_\Sigma| = \kappa\lambda \pm \frac{\lambda}{4}$, αλλά το Σ είναι πιο κοντά στην μεσοκάθετο οπότε $|\Delta r_\Sigma| = \frac{\lambda}{4}$. Τελικά:

$$|\Delta r_\Sigma| = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow (B\Sigma) - (A\Sigma) = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{d}{2} + \ell_2 - (\frac{d}{2} - \ell_2) = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \ell_2 = \frac{\lambda}{8} \Rightarrow \mathbf{\ell_2 = 0{,}5\,cm}.$$

Άρα: $(\Sigma T) = \ell_1 + \ell_2 \Rightarrow$ **(ΣΤ) = 4,5 cm**.