ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

α. Σύνδεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας και ίδιας διεύθυνσης, οι οποίες εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας, οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = A_1 ημωt$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt + φ)$

☞ **Ποια σχέση συνδέει την απομάκρυνση x της συνισταμένης ταλάντωσης με τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων.**

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων, η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι κάθε στιγμή ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν εκτελούσε την κάθε συνιστώσα ταλάντωση ξεχωριστά. Δηλαδή: $\mathbf{x = x_1 + x_2}$

☞ **Ποια είναι η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα.**

Έχουμε: $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A_1 ημωt + A_2 ημ(ωt + φ)$

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή η συνισταμένη κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση με χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής: $x = Aημ(ωt + θ)$

Το πλάτος Α καθώς και η γωνία θ υπολογίζονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συνφ} \quad (1)$$

και $$εφθ = \frac{A_2 ημφ}{A_1 + A_2 συνφ} \quad (2)$$

☞ **Ποια είναι η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης αν η διαφορά φάσης των συνιστωσών ταλαντώσεων ισούται με μηδέν.**

Από τις σχέσεις (1) και (2) υπολογίζουμε ότι $A = A_1 + A_2$ και $εφθ = 0$. Δηλαδή το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών των συνιστωσών ταλαντώσεων και η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με τη φάση των συνιστωσών ταλαντώσεων. Κατά συνέπεια η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι: $x = (A_1 + A_2)ημωt$

☞ **Ποια είναι η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης αν η διαφορά φάσης των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι ίση με 180°, δηλαδή φ = π rad**

Στην περίπτωση αυτή από τη σχέση (1) υπολογίζουμε: $A = |A_1 - A_2|$

Δηλαδή το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των πλατών των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Από τη σχέση (2) έχουμε εφθ = 0, οπότε θ = 0 ή θ = π rad. Όπως φαίνεται και από το επόμενο σχήμα, η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με τη φάση της συνιστώσας ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος. Κατά συνέπεια η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

Αν $A_1 > A_2$: $x = (A_1 - A_2)ημωt$

Αν $A_1 < A_2$: $x = (A_2 - A_1)ημ(ωt + π)$

Αν $A_1 = A_2$: $A = 0$. Δηλαδή το σώμα παραμένει συνέχεια ακίνητο.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση όπου οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν τη μορφή:

$$x_1 = A_1ημ(ωt + φ_{o1}) \qquad \text{και} \qquad x_2 = A_2ημ(ωt + φ_{o2})$$

βρίσκουμε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους:

Για το πλάτος: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$ με $φ = φ_{o2} - φ_{o1}$

Για τη διαφορά φάσης μεταξύ της συνισταμένης ταλάντωσης x = f(t) και της συνιστώσας ταλάντωσης x_1 = f(t): $εφθ = \dfrac{A_2ημφ}{A_1 + A_2συνφ}$ με $φ = φ_{o2} - φ_{o1}$

Για την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης: $x = Aημ(ωt + φ_{o1} + θ)$

☞ **Πως συνθέτουμε δύο ταλαντώσεις αν η μία είναι ημιτονοειδής και η άλλη συνημιτονοειδής.**

Αν έχουμε δύο ταλαντώσεις της μορφής: $x_1 = A_1ημωt$ και $x_2 = A_2συνωt$

τότε αλλάζουμε την εξίσωση με το συνημίτονο και την κάνουμε ημίτονο. Δηλαδή:

$x_2 = A_2συνωt = A_2ημ(ωt + π/2)$ και κατόπιν αντιμετωπίζουμε την γνωστή περίπτωση με διαφορά φάσης π/2 rad.

☞ Ποια σχέση συνδέει την ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης E με τις ενέργειες E_1 και E_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Όταν λέμε ενέργεια E_1 και E_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων, εννοούμε την ενέργεια που θα είχε το σύστημα αν εκτελούσε τη συνιστώσα ταλάντωση $x_1 = f(t)$ ή τη συνιστώσα ταλάντωση $x_2 = f(t)$ ξεχωριστά.

Η σταθερά επαναφοράς $D = m\omega^2$ είναι ίδια και για τη συνισταμένη ταλάντωση αλλά και για τις δύο συνιστώσες ταλαντώσεις. Έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\text{συνφ}) = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + \frac{1}{2}D2A_1A_2\text{συνφ} \Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\text{συνφ}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει γενικά ότι $E \neq E_1 + E_2$.

Η τελική σχέση των E, E_1 και E_2 εξαρτάται από τη διαφορά φάσης φ των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Για παράδειγμα, αν **$\varphi = \pi/2$ rad**, τότε **$E = E_1 + E_2$**, ενώ αν **$\varphi = 0$**, τότε **$E = E_1 + E_2 + DA_1A_2$**.

Αν **$\varphi = 2\pi/3$ rad** τότε προκύπτει **$E = E_1 = E_2$**.

Β. Σύνδεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες, οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας

Θεωρούμε ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους οι οποίες περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$x_1 = Αημω_1 t$ και $x_2 = Αημω_2 t$

☞ **Ποια σχέση συνδέει την απομάκρυνση x της συνισταμένης ταλάντωσης με τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των συνιστωσών ταλαντώσεων;**

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση σύνθεσης, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων, η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι κάθε στιγμή ίση με το αλγεβρικό (άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε αν εκτελούσε την κάθε συνιστώσα ταλάντωση ξεχωριστά. Δηλαδή:

$$\mathbf{x = x_1 + x_2}$$

☞ **Ποια είναι η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης που θα εκτελέσει το σώμα;**

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι κάθε στιγμή ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων x_1 και x_2: (Ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα $ημΑ + ημΒ = 2συν\frac{Α-Β}{2}ημ\frac{Α+Β}{2}$)

$$x = x_1 + x_2 = Αημω_1 t + Αημω_2 t \Rightarrow \mathbf{x = 2Ασυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η κίνηση του σώματος **δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση**, αλλά μια **ταλάντωση ιδιάζουσας μορφής**.

☞ **Τι κίνηση εκτελεί το σώμα αν οι συχνότητες $ω_1$ και $ω_2$ των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων διαφέρουν ελάχιστα;**

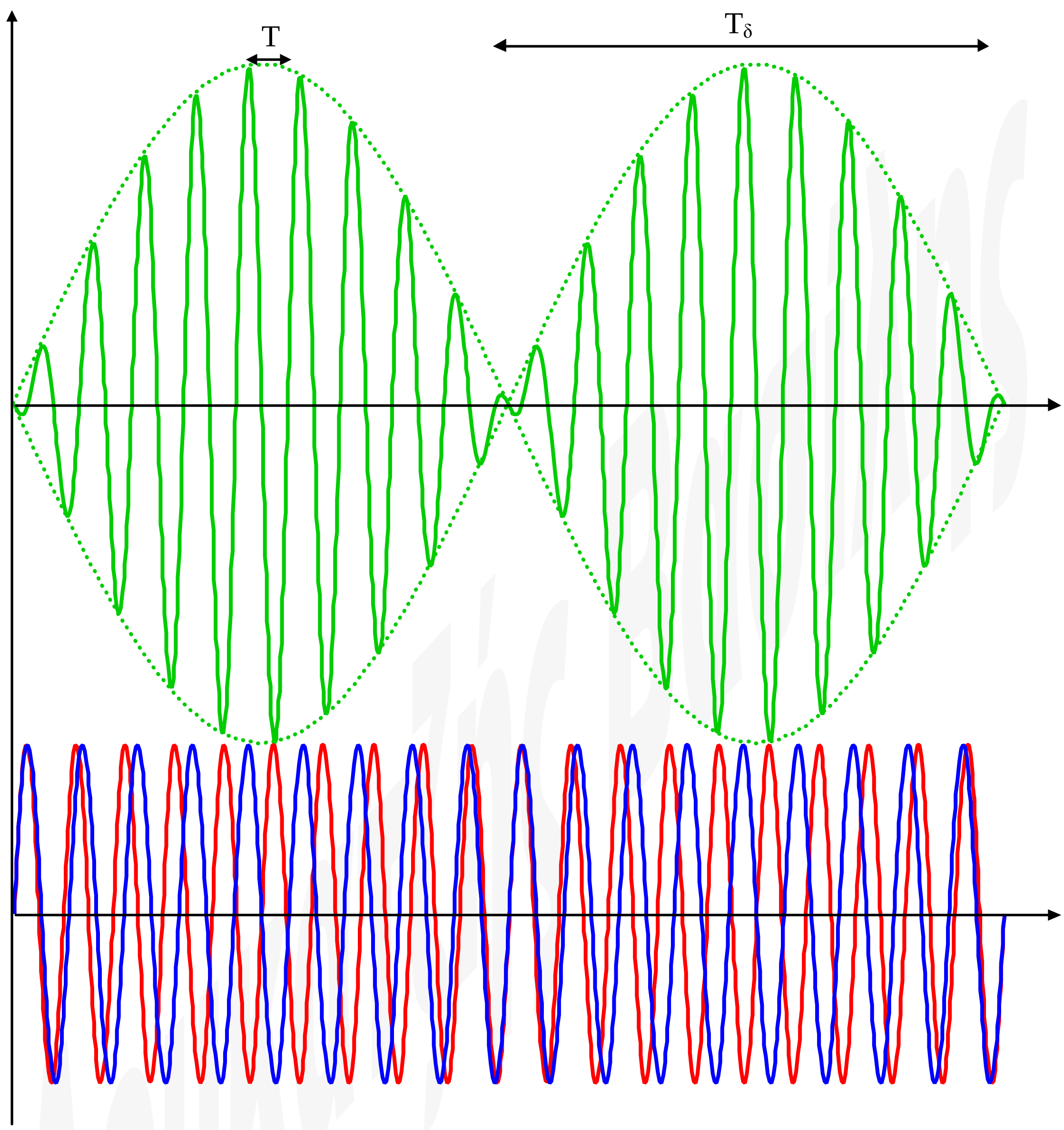
(Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κίνηση κατά την οποία οι δύο συχνότητες διαφέρουν ελάχιστα ($ω_1 \simeq ω_2$). Ο παράγοντας $συν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)$ στην περίπτωση αυτή μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$.

Κατά συνέπεια, την απόλυτη τιμή του παράγοντα $2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ μπορούμε να τη θεωρούμε ως πλάτος της συνισταμένης κίνησης. Η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$x = A'\eta\mu\;\bar{\omega}t \qquad \mu\varepsilon \qquad A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

Η ποσότητα $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$ λέγεται πλάτος και μεταβάλλεται με γωνιακή συχνότητα $\omega = |\omega_1-\omega_2|$. Η γωνιακή συχνότητα της κίνησης είναι: $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2$

Η αυξομείωση του πλάτους της κίνησης που εκτελεί το σώμα ονομάζεται **διακρότημα**. **Ο χρόνος** ανάμεσα σε **δύο διαδοχικούς μηδενισμούς** ή **δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις** του πλάτους λέγεται **περίοδος του διακροτήματος.** Αποδεικνύεται ότι η περίοδος και η συχνότητα του διακροτήματος υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις: $T_\delta = \frac{1}{|f_1-f_2|}$ και $f_\delta = |f_1-f_2|$



Απόδειξη των σχέσεων $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$ και $f_\delta = |f_1 - f_2|$

Η περίοδος του διακροτήματος είναι ίση με τη διαφορά Δt των διαδοχικών χρονικών στιγμών t_1 και t_2 στις οποίες το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται. Το πλάτος |A'| μηδενίζεται όταν:

$$A' = 0 \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right| = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) = 0 \Rightarrow \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi|f_1 - f_2|t_k = (2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow t_k = \frac{2k+1}{2|f_1 - f_2|} \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Άρα $T_\delta = t_{k+1} - t_k = \dfrac{2(k+1)+1}{2|f_1 - f_2|} - \dfrac{2k+1}{2|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$ και $f_\delta = \dfrac{1}{T_\delta} \Rightarrow f_\delta = |f_1 - f_2|$