

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Φθίνουσες μηχανικές ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος ελαττώνεται με το χρόνο και τελικά μηδενίζονται λέγονται φθίνουσες ταλαντώσεις. Η ελάττωση του πλάτους (απόσβεση) οφείλεται στις μη συντηρητικές δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Μέσω του έργου αυτών των δυνάμεων μεταφέρεται ενέργεια από το σύστημα στο περιβάλλον και έτσι η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται οπότε ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης.

Υπάρχουν διαφόρων ειδών φθίνουσες ταλαντώσεις αλλά εμείς θα δούμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος είναι της μορφής: $\vec{F}_{\text{αντ}} = -b\vec{v}$

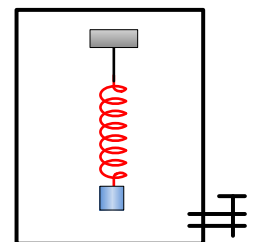
δηλαδή έχει κάθε στιγμή αντίθετη φορά από την ταχύτητα και το μέτρο της είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας. Μια τέτοια δύναμη μπορεί να θεωρηθεί η δύναμη αντίστασης η οποία ασκείται από τον αέρα ή τα υγρά σε μικρά σώματα που κινούνται μέσα σε αυτά.

Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική ποσότητα που λέγεται σταθερά απόσβεσης. Εξαρτάται από το ιξώδες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που κινείται. Η μονάδα μέτρησης της σταθεράς απόσβεσης στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το 1 kg/s

$$\text{και προκύπτει ως εξής: } F = -bv \Rightarrow [b] = \frac{[F]}{[v]} \Rightarrow [b] = \frac{\text{N}}{\text{m/s}} \Rightarrow [b] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{m/s}} \Rightarrow [b] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

([Μέγεθος] = μονάδα του μεγέθους)

Στο σχήμα φαίνεται ένα σύστημα μάζα - ελατήριο που κινείται κατακόρυφα μέσα σε δοχείο γεμάτο με αέρα. Κατά την κίνηση αυτή το σώμα δέχεται εκτός από τη δύναμη εναπόφράς και τη δύναμη αντίστασης $\vec{F}_{\text{αντ}}$ από τον αέρα. Αυξάνοντας με την αεραντλία την πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο, αυξάνουμε την τιμή της σταθεράς απόσβεσης b .



Σχέση μεταξύ επιτάχυνσης ταχύτητας και απομάκρυνσης μια δεδομένη χρονική στιγμή στη φθίνουσα μηχανική ταλάντωση

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος ασκούνται σε αυτό δύο δυνάμεις: η δύναμη επαναφοράς και η δύναμη αντίστασης στην κίνηση. Ισχύει για κάθε χρονική στιγμή:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{\text{επ}} + \vec{F}_{\text{αντ}} = m\vec{a} \Rightarrow -Dx - b v = m a$$

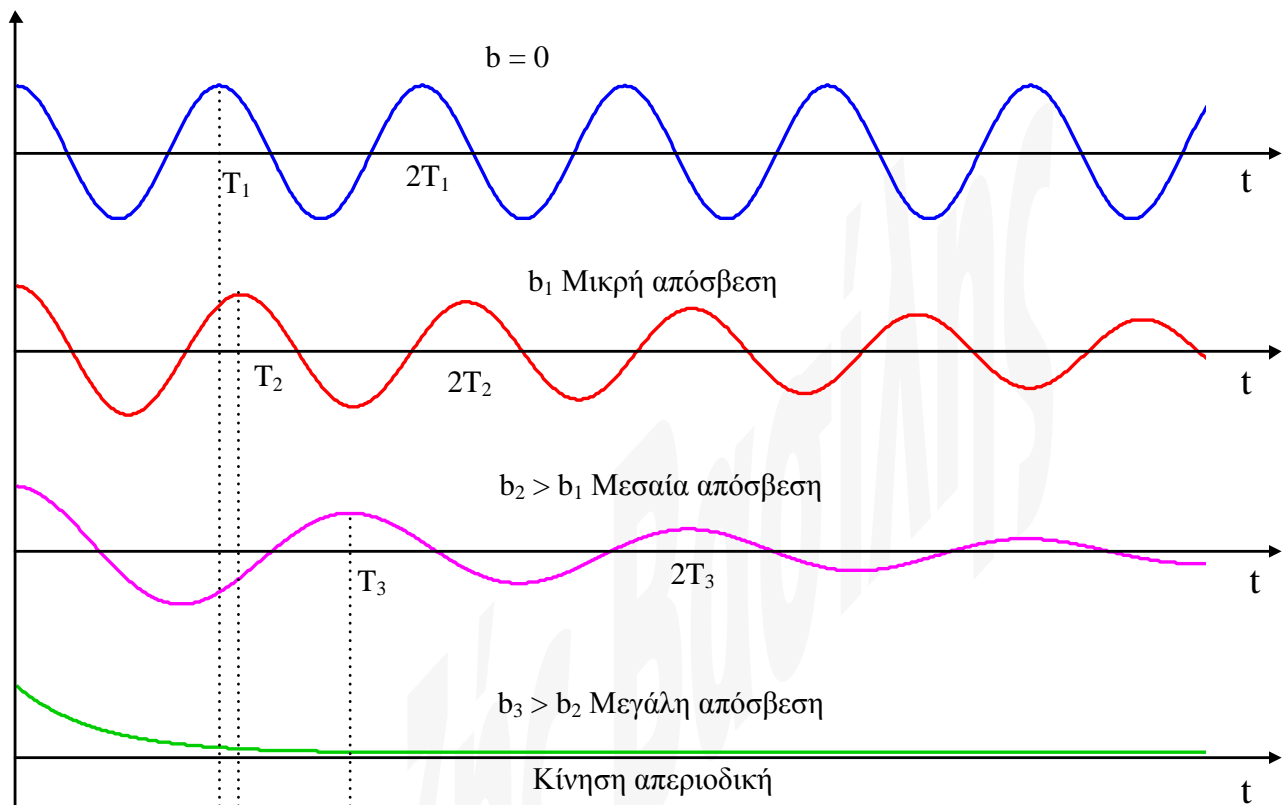
Συμπεράσματα από τη μελέτη της φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης

A. Για την απομάκρυνση x

Για **μικρή σταθερά απόσβεσης b** η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας μεταβάλλεται με το χρόνο και η μέγιστη απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας ελαττώνεται συνεχώς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο για διάφορες τιμές της απόσβεσης b.

Αν η **σταθερά απόσβεσης μεγαλώσει**, τότε η ταλάντωση **αποσβαίνει πιο γρήγορα**. **Ταχύτερη απόσβεση** μπορούμε να πετύχουμε πειραματικά **αυξάνοντας την πίεση** του αέρα μέσα στο δοχείο όπου γίνεται η φθίνουσα ταλάντωση. Με τον τρόπο αυτό **αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b**, οπότε η ταλάντωση **φθίνει πιο γρήγορα**.

Στην ακραία περίπτωση όπου η **σταθερά απόσβεσης παίρνει πολύ μεγάλες τιμές** η κίνηση γίνεται **απεριοδική**, δηλαδή ο ταλαντωτής επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του χωρίς ποτέ να την υπερβεί.

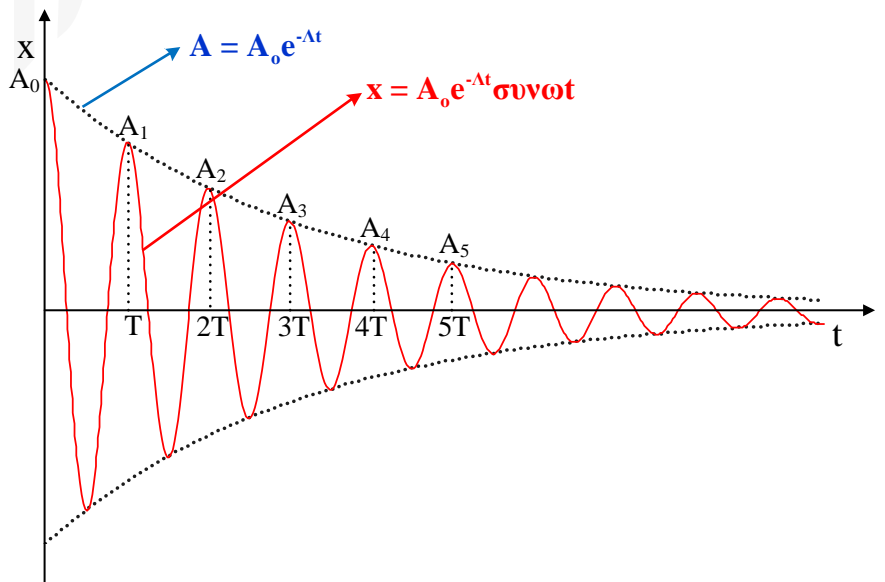


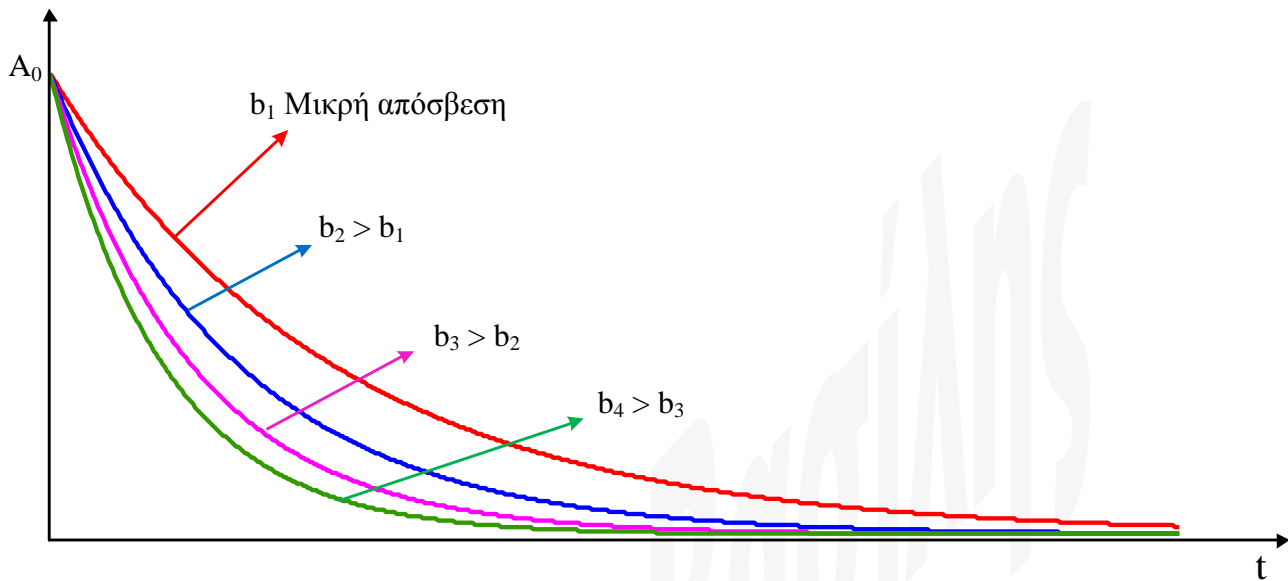
B. Για το πλάτος A

α. Εφόσον η σταθερά απόσβεσης είναι μικρή, το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ όπου A_0 το αρχικό πλάτος.

Η σταθερά Λ εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και από τη

μάζα του ταλαντούμενου συστήματος. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση $A = f(t)$ για τέσσερις διαφορετικές τιμές της σταθεράς απόσβεσης.





β. Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους εξαρτάται από τη **σταθερά απόσβεσης b**. Όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης b, τόσο πιο **γρήγορα αποσβάνει η ταλάντωση** (οπότε είναι μεγαλύτερος και ο ρυθμός μείωσης του πλάτους).

Στο πάνω σχήμα φαίνεται ότι το πλάτος ελαττώνεται πιο γρήγορα όταν η σταθερά απόσβεσης b είναι μεγαλύτερη.

γ. Χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους

Χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους ονομάζεται **η χρονική διάρκεια** που απαιτείται για να **ελαττωθεί το πλάτος από μια αρχική τιμή στο μισό αυτής της τιμής**. Ο χρόνος ημίσειας ζωής λέγεται και χρόνος ημιζωής ή χρόνος υποδιπλασιασμού. Ο χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Απόδειξη της σχέσης

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Αν στη σχέση

αυτή θέσουμε όπου $A = \frac{A_0}{2}$, προκύπτει ο χρόνος ημίσειας ζωής του πλάτους:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-\Lambda t}) \Rightarrow -\ln 2 = -\Lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

δ. Το πηλίκο δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση παραμένει

σταθερό. Δηλαδή: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_{v-1}}{A_v} = \text{σταθ.} = e^{\Lambda T}$

όπου A_0 το αρχικό πλάτος, A_1 το πλάτος στο τέλος της 1^{ης} περιόδου, A_2 το πλάτος στο τέλος της 2^{ης} περιόδου κ.ο.κ., T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης.

☞ Απόδειξη

Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{A_{v-1}}{A_v} = \frac{A_0 e^{-(v-1)\Lambda T}}{A_0 e^{-v\Lambda T}} = e^{-(v-1)\Lambda T} \cdot e^{v\Lambda T} \Rightarrow \frac{A_{v-1}}{A_v} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

Δηλαδή το πηλίκο δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερό και

ίσο με $e^{\Lambda T}$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_{v-1}}{A_v} = \text{σταθ.} = e^{\Lambda T}$

ε. Για την περίοδο - τη συχνότητα - τη γωνιακή συχνότητα

Σε όλη τη διάρκεια μιας φθίνουσας ταλάντωσης **η περίοδος (T), η συχνότητα (f) όπως και η γωνιακή συχνότητα (ω) παραμένουν σταθερές. Η τιμή τους εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b. Η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από την ιδιοπερίοδο T_0 της ταλάντωσης του συστήματος.** (περίοδος της ελεύθερης ταλάντωσης του ίδιου συστήματος, χωρίς να ασκείται η δύναμη αντίστασης στην κίνηση). Σε πολλά συστήματα όμως όπου η απόσβεση είναι μικρή μπορούμε να θεωρούμε ότι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης του συστήματος είναι ίση με την ιδιοπερίοδο της ταλάντωσης του.

στ. Για την Ενέργεια

Στην περίπτωση της μικρής σταθεράς απόσβεσης, όπου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\omega \approx \omega_0$, η ενέργεια

της φθίνουσας ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2} D A^2$ με αρχική ενέργεια $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$

$$\text{Ισχύει: } E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \mathbf{E = E_0 e^{-2\Lambda t}}$$

Δηλαδή και η ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

Παραδείγματα φθίνουσων ταλαντώσεων

Το σύστημα ανάρτησης του αυτοκινήτου είναι ένα σύστημα **αποσβεννόμενων ταλαντώσεων**. Τα **αμορτισέρ** εξασφαλίζουν **δύναμη απόσβεσης** -που εξαρτάται από την ταχύτητα- τέτοια, ώστε όταν το αυτοκίνητο περνά από ένα εξόγκωμα του δρόμου, να μη συνεχίζει να ταλαντώνεται για πολύ χρόνο. Καθώς **τα αμορτισέρ παλιώνουν** και φθείρονται, **η τιμή του b ελαττώνεται** και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο.

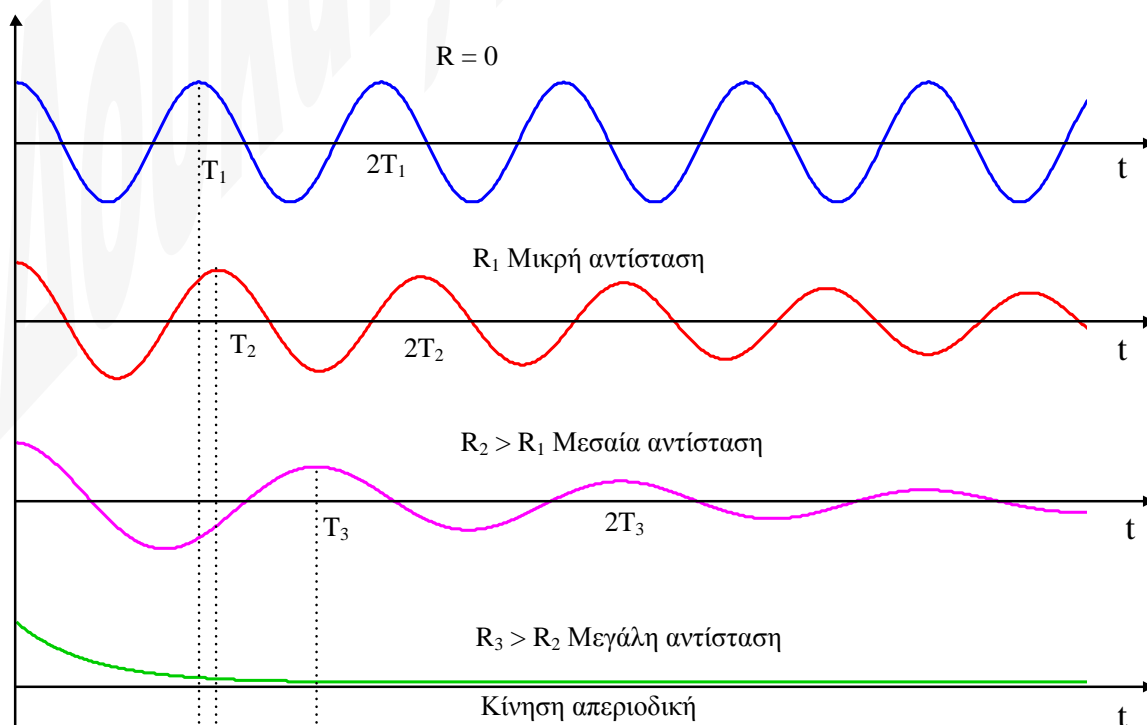
Η φθορά αυτή **μειώνει την ασφάλεια**, επειδή οι ρόδες έχουν **λιγότερη επαφή με το έδαφος**.

Ενώ όμως **στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι επιθυμητή η μεγάλη απόσβεση**, σε άλλα συστήματα, όπως **σε ένα εκκρεμές ρολόι, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της απόσβεσης**.

Φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Σ' ένα κύκλωμα LC οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι αμείωτες αν θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας (ιδανικό κύκλωμα). Πρακτική όμως εμφανίζονται πάντα **απώλειες ενέργειας**, οι οποίες **οφείλονται στη θερμότητα** που αποδίδεται στο περιβάλλον από τις **ωμικές αντιστάσεις** του κυκλώματος, καθώς και στην **ενέργεια που εκπέμπεται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας**. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ελαττώνεται η ολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης και κατά συνέπεια να **ελαττώνεται το πλάτος της έντασης** του ρεύματος, καθώς και το **μέγιστο φορτίο** του πυκνωτή. Μια τέτοια ταλάντωση λέγεται φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση.

Αν θεωρήσουμε ότι ο κύριος λόγος απώλειας ενέργειας είναι η ωμική αντίσταση R του κυκλώματος, μπορούμε να παρατηρήσουμε μια αντίστοιχη συμπεριφορά με αυτή των μηχανικών ταλαντώσεων. Συγκεκριμένα, μπορούμε να **αντιστοιχίσουμε** την ωμική **αντίσταση R** με τη **σταθερά απόσβεσης b** των μηχανικών ταλαντώσεων. Έτσι, η **αύξηση της αντίστασης** έχει ως αποτέλεσμα να γίνεται **πιο γρήγορα η απόσβεση**, όπως αντίστοιχα συμβαίνει στη μηχανική ταλάντωση με την αύξηση της σταθεράς απόσβεσης b . Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του φορτίου q του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο για διάφορες τιμές της αντίστασης R .



☞ Συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης.

α. Για ορισμένη τιμή της ωμικής αντίστασης, η περίοδος είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Αύξηση της αντίστασης συνεπάγεται αύξηση της περιόδου.

β. Η περίοδος της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από την ιδιοπερίοδο του κυκλώματος ($T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$). Στην περίπτωση όπου η αντίσταση του κυκλώματος είναι μικρή, η περίοδος της φθίνουσας ηλεκτρικής ταλάντωσης μπορεί να θεωρηθεί ίση με την ιδιοπερίοδο της ταλάντωσης.

γ. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος καθώς και το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή μειώνονται με το χρόνο. Το πόσο γρήγορα μειώνονται (ρυθμός μείωσης) εξαρτάται από την τιμή της ωμικής αντίστασης R . Όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση R , τόσο πιο γρήγορα αποσβαίνει η ηλεκτρική ταλάντωση του κυκλώματος.

δ. Αν η αντίσταση υπερβεί μια ορισμένη τιμή, τότε το κύκλωμα παύει να εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Το φορτίο και το ρεύμα απλά μειώνονται μέχρι να μηδενιστούν (απεριοδική μεταβολή).

Παρατήρηση: Σε αντιστοιχία με τη μηχανική ταλάντωση, μπορούμε να παρατηρήσουμε για την ηλεκτρική ταλάντωση ότι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο και δίνεται από την εξίσωση: $Q = Q_0 e^{-\Lambda t}$ Q_0 το αρχικό φορτίο.

Η σταθερά Λ εξαρτάται από την ωμική αντίσταση και από το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου.