ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ο πυκνωτής

Ο πυκνωτής είναι μια διάταξη **αποθήκευσης ηλεκτρικού φορτίου, επομένως και ηλεκτρικής ενέργειας**. Η απλούστερη μορφή πυκνωτή είναι ο επίπεδος πυκνωτής, ο οποίος αποτελείται από δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες, του ίδιου σχήματος, που βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους και διαχωρίζονται από μονωτικό υλικό. Οι δύο μεταλλικές πλάκες ονομάζονται **οπλισμοί** του πυκνωτή.

α. Το φορτίο και η τάση του πυκνωτή

Όταν ο πυκνωτής φορτίζεται, οι οπλισμοί του αποκτούν ίσα κατά μέτρο ετερώνυμα ηλεκτρικά φορτία +q και – q. Ως φορτίο q_c του πυκνωτή θεωρείται **το φορτίο του θετικού οπλισμού** του πυκνωτή.

Τάση V_c του πυκνωτή ονομάζεται η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, δηλαδή:

$V_c = V^{(+)} - V^{(-)}$ όπου $V^{(+)}$ το δυναμικό του θετικά φορτισμένου και $V^{(-)}$ το δυναμικό του αρνητικά φορτισμένου οπλισμού.

β. Η χωρητικότητα του πυκνωτή

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει τη δυνατότητα του πυκνωτή να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρική ενέργεια ονομάζεται χωρητικότητα.

Χωρητικότητα C ενός πυκνωτή ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του φορτίου q_c του πυκνωτή προς τη διαφορά δυναμικού (τάση) V_c μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, δηλαδή: $C = \dfrac{q_c}{V_c}$

Μονάδα χωρητικότητας στο S.I. είναι το **1 Farad (F)**.

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή δεν εξαρτάται από το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στους οπλισμούς του πυκνωτή και από τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του. Εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πυκνωτή, από τη σχετική τους θέση και από το μονωτικό υλικό (διηλεκτρικό) που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών του. Για παράδειγμα, η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη του εμβαδού A των οπλισμών του και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης ℓ μεταξύ τους.

γ. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

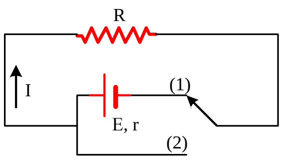
Η ηλεκτρική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, ο οποίος είναι φορτισμένος με φορτίο q_c και η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του είναι V_c δίνεται από τη σχέση: $U_E = \frac{1}{2} q_c \cdot V_c$ ή, με αντικατάσταση από τον ορισμό της χωρητικότητας $C = \frac{q_c}{V_c}$, έχουμε:

$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ και $U_E = \frac{1}{2} C V^2$. (αυτούς τους δύο τύπους χρησιμοποιούμε συνήθως)

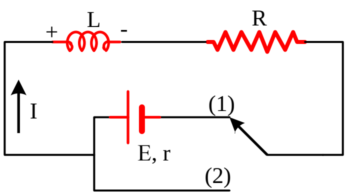
Το πηνίο

Το πηνίο είναι μια διάταξη η οποία, όταν βρίσκεται σε ένα κύκλωμα, "αντιστέκεται" στη μεταβολή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει, τείνοντας να αναιρέσει τη μεταβολή αυτή. Η ιδιότητα αυτή του πηνίου ονομάζεται **φαινόμενο αυτεπαγωγής**.

α. Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής.

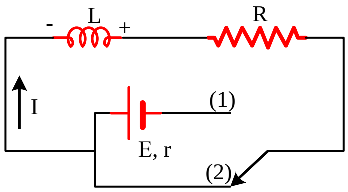


Έστω ένα κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει πηγή (E,r), αντιστάτη αντίστασης R και διακόπτη. Όταν μεταφέρουμε το μεταγωγό στη θέση (1), η ένταση του ρεύματος αποκτά ακαριαία την τιμή: $I = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{E + r}$ σύμφωνα με το νόμο του Ohm.



Αν όμως στο κύκλωμα περιλαμβάνεται και πηνίο, παρατηρούμε ότι όταν μεταφέρουμε το μεταγωγό στη θέση (1), η ένταση του ρεύματος δεν αποκτά ακαριαία τη μέγιστη τιμή της $I = \frac{E}{R_{ολ}}$, αλλά αυξάνεται σταδιακά και μεγιστοποιείται μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα. Το φαινόμενο αυτό, που ονομάζεται **φαινόμενο αυτεπαγωγής**, ερμηνεύεται ως εξής: Αρχικά το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα. Όταν μεταφέρουμε το μεταγωγό στη θέση (1), μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, άρα μεταβάλλεται και η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου, επομένως μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή που διέρχεται από τις σπείρες του. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία

ΗΕΔ από επαγωγή στο πηνίο, η οποία, σύμφωνα με το νόμο του Lenz, έχει τέτοια πολικότητα ώστε να «αντιστέκεται» στο αίτιο που την προκαλεί, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι η μεταβολή της έντασης του ρεύματος. Επειδή η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο, το οποίο δημιουργείται από το ρεύμα που διαρρέει το ίδιο το πηνίο, ονομάζεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή. Η πολικότητά της είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα αφού "αντιστέκεται" στην αύξηση της έντασης του ρεύματος, "τείνοντας" να δημιουργήσει ρεύμα αντίθετης φοράς από αυτό που διαρρέει το κύκλωμα. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή υπολογίζεται από τη σχέση: $\mathbf{E_{αυτ} = -L\frac{di}{dt}}$ όπου $\frac{di}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα και L ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. Αντίθετα, αν θέσουμε την πηγή εκτός κυκλώματος μεταφέροντας το μεταγωγό στη θέση (2), το ρεύμα μηδενίζεται ακαριαία αν δεν υπάρχει πηνίο, ενώ η ύπαρξη του πηνίου προκαλεί καθυστέρηση στο μηδενισμό της έντασης, αφού η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του έχει πλέον τέτοια πολικότητά ώστε να "αντιστέκεται" στη μείωση της έντασης του ρεύματος, "τείνοντας" να δημιουργήσει ρεύμα ίδιας φοράς με αυτό που διαρρέει το κύκλωμα.



β. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής L του πηνίου

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής L του πηνίου εκφράζει την αδράνεια ("αντίσταση") του πηνίου στη μεταβολή του ρεύματος που το διαρρέει και εξαρτάται από τα γεωμετρική χαρακτηριστικό του πηνίου (αριθμός σπειρών N, μήκος ℓ, εμβαδόν σπειρών A) και από τη μαγνητική διαπερατότητα μ του πυρήνα γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένες οι σπείρες του πηνίου.

Η μονάδα του συντελεστή αυτεπαγωγής στο S.I. είναι το **1 Henry (H)**.

γ. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου ενός πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I, δίνεται από τη σχέση: $U_B = \frac{1}{2}LI^2$

ΙΔΑΝΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ LC

1. Ηλεκτρική ταλάντωση

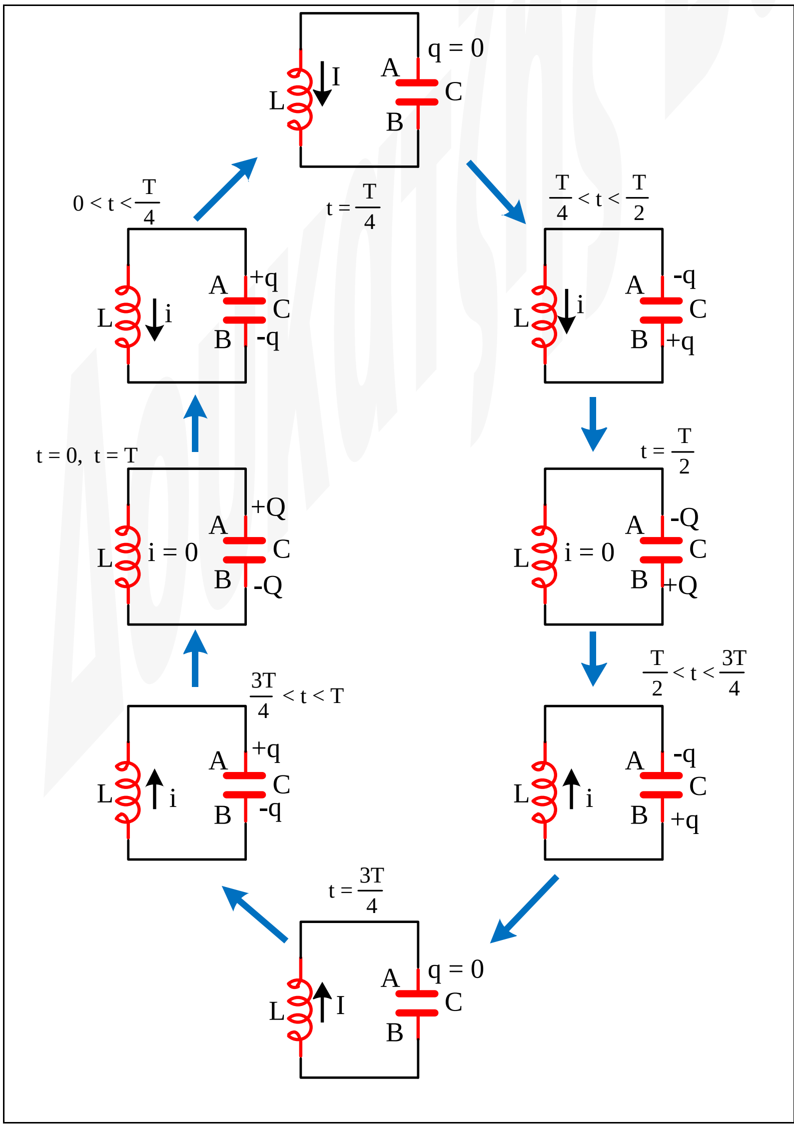
Διαθέτουμε ένα κύκλωμα το οποίο αποτελείται από ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, πυκνωτή χωρητικότητας C και έναν ανοικτό διακόπτη. Αν θεωρήσουμε όλες τις ωμικές αντιστάσεις αμελητέες, το κύκλωμα αυτό αποτελεί ένα ιδανικό Κύκλωμα LC (κύκλωμα Thomson). Συνδέουμε τον πυκνωτή με πηγή συνεχούς τάσης V, οπότε το φορτίο που αποθηκεύεται στον πυκνωτή και η ενέργεια του ηλεκτρικού του πεδίου υπολογίζονται από τις σχέσεις: $Q = CV$ και $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Στη συνέχεια αποσυνδέουμε την πηγή και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε το διακόπτη. Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα. Λόγω της μεταβολής της έντασης του ρεύματος αναπτύσσεται στο πηνίο ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, η οποία, σύμφωνα με το νόμο του Lenz, "αντι-στέκεται" στην αύξηση της έντασης του ρεύματος, με αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος να αυξάνεται σταδιακά. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή είναι σε κάθε στιγμή ίση με την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Έτσι, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η τάση V_c στα άκρα του πυκνωτή και η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή έχουν μέγιστη τιμή. Καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται, η τάση στα άκρα του και η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή μειώνονται, ενώ η ένταση του ρεύματος αυξάνεται σταδιακά και γίνεται μέγιστη τη στιγμή που ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως. Στη συνέχεια, το ρεύμα αρχίζει να μειώνεται σταδιακά, χωρίς να αλλάξει φορά, λόγω της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο, η οποία έχει αντίθετη πολικότητά από την προηγούμενη και "αντιστέκεται" στη μείωση της έντασης του ρεύματος. Καθώς το ρεύμα συνεχίζει να ρέει, φορτίζει τον πυκνωτή με αντίθετη πολικότητά της αρχικής.

Όταν το ρεύμα μηδενιστεί, ο πυκνωτής θα έχει αποκτήσει πάλι φορτίο Q, με αντίθετη από την αρχική πολικότητα. Στη συνέχεια ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται και πάλι, ενώ τώρα το ρεύμα έχει αντίθετη φορά από την προηγούμενη.

Η διαδικασία πλέον επαναλαμβάνεται αντίστροφα και το κύκλωμα επανέρχεται στην κατάσταση στην οποία βρισκόταν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Θεωρώντας ότι στο κύκλωμα δεν υπάρχουν **απώλειες ενέργειας (υπό μορφή θερμότητας, ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κ.λπ.)**, η προηγούμενη διαδικασία θα επαναλαμβάνεται συνέχεια. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ηλεκτρική ταλάντωση. Το χρονικό διάστημα στο οποίο επαναλαμβάνεται πλήρως η διαδικασία που περιγράψαμε ονομάζεται περίοδος T της ταλάντωσης. Στο σχήμα φαίνεται η διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω.



$t = 0\,,\, t = T$	$q = Q$ $i = 0$
$0 < t < \frac{T}{4}$ $\lvert q\rvert \rightarrow$ μειώνεται $\lvert i\rvert \rightarrow$ αυξάνεται Ο πυκνωτής δίνει ενέργεια στο κύκλωμα	
$t = \frac{T}{4}$	$q = 0$ $i = -I$
$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$ $\lvert q\rvert \rightarrow$ αυξάνεται $\lvert i\rvert \rightarrow$ μειώνεται Το πηνίο δίνει ενέργεια στο κύκλωμα	
$t = \frac{T}{2}$	$q = -Q$ $i = 0$
$\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4}$ $\lvert q\rvert \rightarrow$ μειώνεται $\lvert i\rvert \rightarrow$ αυξάνεται Ο πυκνωτής δίνει ενέργεια στο κύκλωμα	
$t = \frac{3T}{4}$	$q = 0$ $i = I$
$\frac{3T}{4} < t < T$ $\lvert q\rvert \rightarrow$ αυξάνεται $\lvert i\rvert \rightarrow$ μειώνεται Το πηνίο δίνει ενέργεια στο κύκλωμα	

Παρατήρηση. Όταν το ρεύμα κατευθύνεται από τον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή στον θετικά φορτισμένο οπλισμό τότε το φορτίο αυξάνεται και ο πυκνωτής φορτίζεται και αντίστροφα.

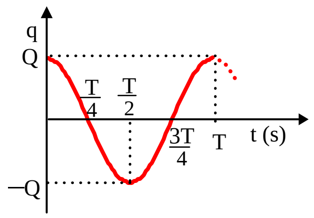
Διευκρίνιση για το φορτίο του πυκνωτή

Όταν μιλάμε για φορτίο του πυκνωτή, εννοούμε την απόλυτη τιμή του φορτίου ενός οπλισμού του, άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για αρνητικό φορτίο, όπως και δεν έχει νόημα να μιλάμε και για αρνητική τάση.

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις θα συναντήσουμε και αρνητικό φορτίο και έχει το εξής νόημα. Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο. Έτσι λοιπόν αν μία χρονική στιγμή κάποιος οπλισμός είναι θετικά φορτισμένος, την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι αρνητικά και αντίστροφα. Συνεπώς, όταν μιλάμε για **φορτίο πυκνωτή**, στην ουσία μιλάμε για το **φορτίο κάποιου συγκεκριμένου οπλισμού**, γιατί, όπως είπαμε και πιο πάνω, **ο πυκνωτής έχει πάντα θετικό φορτίο**.

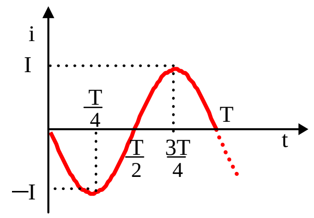
☞ **Οι χρονικές εξισώσεις του φορτίου q = f(t) και της έντασης του ρεύματος i = f(t) σε ένα ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων;**

Θεωρώντας ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή την οποία το φορτίο στον πυκνωτή έχει τη μέγιστη τιμή του ($q = +Q$) αποδεικνύεται ότι το φορτίο του πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση:



$$\mathbf{q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t}$$

Η ένταση του ρεύματος ορίζεται από τη σχέση $i = \frac{dq}{dt}$ και προκύπτει:



$$\mathbf{i = -I\eta\mu\omega t}$$

όπου $\mathbf{I = \omega Q}$ η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος.

Οι γραφικές παραστάσεις $q = f(t)$ και $i = f(t)$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Η διαφορά φάσης μεταξύ του φορτίου q του πυκνωτή και της έντασης i του ρεύματος σε ιδανικό κύκλωμα LC.

Είναι $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ και $i = -I\eta\mu\omega t = I\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει ότι **η ένταση του ρεύματος προηγείται του φορτίου του πυκνωτή κατά π/2 rad.**

☞ Πως υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα και την περίοδο ταλάντωσης ενός ιδανικού κυκλώματος LC;

Η γωνιακή συχνότητα ω και η περίοδος T της ταλάντωσης ενός ιδανικού κυκλώματος LC εξαρτώνται μόνο από τη χωρητικότητα του πυκνωτή και από το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Υπολογίζονται από τους τύπους:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \text{και} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

☞ Με τι ισούται η ενέργεια της ταλάντωσης σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC

Η αρχική ενέργεια του κυκλώματος ισούται με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή. Η ενέργεια αυτή έχει αρχικά τη μέγιστη τιμή της, η οποία ισούται με:

$$\boldsymbol{U_{E,max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t = 0 που κλείνουμε το διακόπτη και αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή αρχίζει να ελαττώνεται και μετατρέπεται σταδιακά σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή (U_E) και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου (U_B), κάθε χρονική στιγμή, υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$

Τη στιγμή που ο πυκνωτής έχει εκφορτιστεί πλήρως, όλη η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου έχει μετατραπεί σε ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου έχει τώρα τη μέγιστη τιμή της:

$$U_{B,max} = \frac{1}{2}LI^2$$

Στη συνέχεια η διαδικασία πραγματοποιείται αντίστροφα. Δηλαδή, καθώς το ρεύμα ελαττώνεται, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου ελαττώνεται, ενώ αυξάνεται η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι, τη στιγμή που ο πυκνωτής έχει φορτιστεί ξανά με αντίθετη πολικότητα από την αρχική ($q = -Q$), η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου έχει αποκτήσει και πάλι τη μέγιστη τιμή της, ενώ η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με μηδέν. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται και στη συνέχεια, όπου το ρεύμα αλλάζει φορά.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι στο κύκλωμα LC συμβαίνει ταλάντωση ενέργειας, δηλαδή μια περιοδική μεταβολή της ενέργειας του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου, κάτι ανάλογο με την περιοδική μεταβολή της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας που συμβαίνει σε ένα μηχανικό σύστημα, στο ιδανικό κύκλωμα LC δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Συνεπώς η ολική ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή και είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή ισχύει:

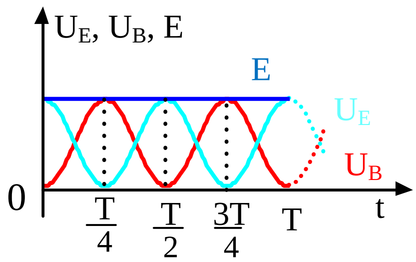
$$E = U_E + U_B = U_{E,max} = U_{B,max} \quad \text{ή} \quad E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}L\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$

☞ **Οι χρονικές εξισώσεις της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC**

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t}{C} \Rightarrow \mathbf{U_E = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t} \ \text{και}$$

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t \Rightarrow \mathbf{U_B = E\eta\mu^2\omega t}.$$

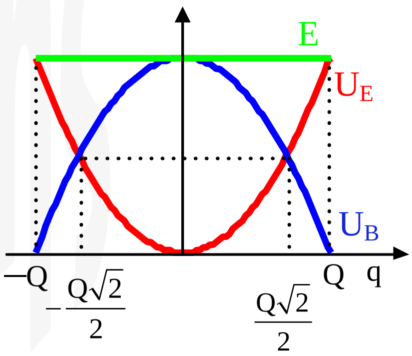


Οι γραφικές παραστάσεις των σχέσεων αυτών φαίνονται στο σχήμα.

Οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών σε σχέση με το φορτίο και την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος

☞ Οι ενέργειες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου σε συνάρτηση με το φορτίο q του πυκνωτή υπολογίζεται από την εξίσωση: $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$. Η σχέση αυτή είναι της μορφής $y = \alpha\chi^2$. Επομένως η γραφική παράσταση $U_E = f(q)$ είναι μια παραβολή η οποία στρέφει τα κοίλα πάνω.



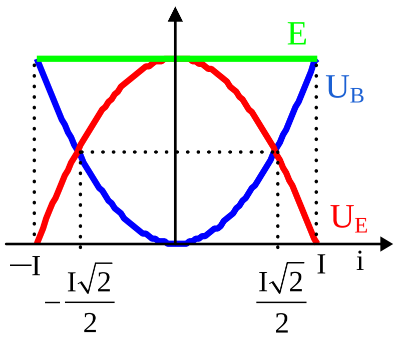
Για να εκφράσουμε την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το φορτίο q, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Είναι: $E = U_E + U_B \Rightarrow U_B = E - U_E \Rightarrow U_B = E - \frac{1}{2C}q^2$. Η σχέση αυτή είναι της μορφής $y = \beta - \alpha\chi^2$.

Επομένως η γραφική παράσταση $U_B = f(q)$ είναι μια παραβολή η οποία στρέφει τα κοίλα κάτω. Τα σημεία τομής είναι: $U_B = U_E \Rightarrow E - U_E = U_E \Rightarrow E = 2U_E \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 2\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow \mathbf{q = \pm\frac{Q}{\sqrt{2}} = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}}$

☞ Οι ενέργειες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος.

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος i υπολογίζεται από την εξίσωση: $U_B = \frac{1}{2}Li^2$. Η σχέση αυτή είναι της μορφής $y = \alpha x^2$. Επομένως η γραφική παράσταση $U_B = f(i)$ είναι μια παραβολή η οποία στρέφει τα κοίλα πάνω.



Για να εκφράσουμε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος i, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Είναι: $E = U_E + U_B \Rightarrow U_E = E - U_B \Rightarrow U_E = E - \frac{1}{2}Li^2$

Τα σημεία τομής είναι: $U_B = U_E \Rightarrow E - U_B = U_B \Rightarrow E = 2U_B \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = 2\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \mathbf{i = \pm\frac{I}{\sqrt{2}} = \pm\frac{I\sqrt{2}}{2}}$

☞ Πού οφείλονται οι απώλειες ενέργειας σε πραγματικό κύκλωμα LC;

Οι δύο βασικοί λόγοι για τους οποίους η ενέργεια της ταλάντωσης ελαττώνεται σ' ένα πραγματικό κύκλωμα LC είναι:

α. η θερμότητα που εκλύεται λόγω φαινομένου Joule από τις αντιστάσεις του κυκλώματος,

β. η ενέργεια που εκπέμπεται με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κατά τη λειτουργία του κυκλώματος.

Τα υπόλοιπα μεγέθη που εμφανίζονται στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις

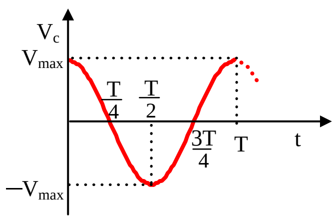
☞ Η τάση στα άκρα του πυκνωτή

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$C=\frac{q}{V_c}\Rightarrow V_c=\frac{q}{C}\Rightarrow V_c=\frac{Q\text{συν}\omega t}{C}\Rightarrow \mathbf{V_c=V_{max}\text{συν}\omega t} \text{ με } \mathbf{V_{max}=\frac{Q}{C}}$$

Κάθε στιγμή στο κύκλωμα ισχύει $\mathbf{V_L = V_c}$ δηλαδή η εξίσωση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι ίδια με την εξίσωση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή

Σημείωση: Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω όταν λέμε τάση στα άκρα του πυκνωτή στην ουσία εννοούμε την τάση του οπλισμού που την t = 0, ήταν θετικά φορτισμένος ($V_c = V^{(+)} - V^{(-)}$).



Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

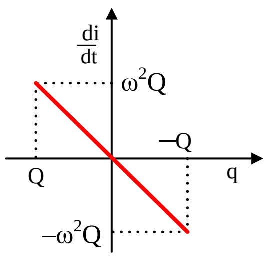
Για την τάση γενικά ενός πηνίου ισχύει: $V_L = E_{\alpha\upsilon\tau} \pm iR_L$, επειδή όμως το πηνίο είναι ιδανικό $R_L = 0$.

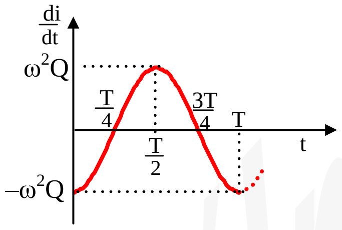
Άρα ισχύει $\mathbf{V_L = E_{\alpha\upsilon\tau}}$

☞ Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος

Όπως είδαμε παραπάνω ισχύει $V_L = V_c \Rightarrow E_{\alpha\upsilon\tau} = \frac{q}{C} \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} \Rightarrow \mathbf{\frac{di}{dt} = -\omega^2 q}$

και η χρονοεξίσωση αυτού είναι $\mathbf{\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q\text{συν}\omega t}$ οι γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών σχέσεων φαίνονται παρακάτω.





☞ **Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή**

Έχουμε $\frac{dV_c}{dt}=\frac{d(\frac{q}{C})}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dV_c}{dt}=\frac{i}{C}}$ και η χρονοεξίσωση αυτού είναι $\boldsymbol{\frac{dV_c}{dt}=-\frac{I}{C}\eta\mu\omega t}$

☞ **Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή**

$\frac{dU_E}{dt}=V_c\cdot i=\frac{q\cdot i}{C}\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dU_E}{dt}=\frac{q\cdot i}{C}}$ Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι η ισχύς P = V·I

Ποια είναι όμως η μέγιστη του τιμή;

$\frac{dU_E}{dt}=P_C=V_C i=\frac{qi}{C}=-\frac{QI}{C}\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega t=-\frac{QI}{2C}\eta\mu 2\omega t\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dU_E}{dt}=-\frac{QI}{2C}\eta\mu 2\omega t}$ άρα $\boldsymbol{\left.\frac{dU_E}{dt}\right|_{max}=\frac{QI}{2C}}$

(χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα ημ2α = 2ημα·συνα)

☞ **Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου**

$\frac{dU_B}{dt}=-\frac{dU_E}{dt}=-\frac{q\cdot i}{C}$

και η μέγιστη τιμή είναι: $\frac{dU_B}{dt}=P_L=-|V_L|i=-V_C i=-\frac{qi}{C}=\frac{QI}{C}\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega t\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dU_B}{dt}=\frac{QI}{2C}\eta\mu 2\omega t}$

άρα $\boldsymbol{\left.\frac{dU_B}{dt}\right|_{max}=\frac{QI}{2C}}$

Η σχέση μεταξύ των μέγιστων τιμών έντασης ρεύματος I και φορτίου Q

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC το οποίο εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις παραμένει σταθερή. Επομένως: $U_{E,max}=U_{B,max}\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}LI^2\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{LC}}Q$

Και επειδή ισχύει $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ έχουμε τελικά: **$I=\omega Q$**

Μία χρήσιμη σχέση είναι αυτή μεταξύ μέγιστου ρεύματος και μέγιστης τάσης που δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και χρειάζεται απόδειξη: $U_{B_{max}} = U_{E_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV_{C_{max}}^2 \Rightarrow \mathbf{I = V_{C,max}\sqrt{\frac{C}{L}}}$

☞ Εφαρμογές της αρχής διατήρησης της ενέργειας σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC

Όταν γνωρίζουμε το **φορτίο** του πυκνωτή σε κάποια χρονική στιγμή και θέλουμε να υπολογίσουμε την **ένταση** του ρεύματος **την ίδια χρονική στιγμή** ή το αντίστροφο, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για παράδειγμα, όταν:

α. δίνεται το φορτίο q και ζητείται η ένταση i:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega^2}$$

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \Rightarrow Q^2 = LCi^2 + q^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{i^2}{\omega^2} + q^2 \Rightarrow \mathbf{i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}}$$

β. δίνεται η ένταση i και ζητείται το φορτίο q:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega^2}$$

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \Rightarrow I^2 = i^2 + \frac{q^2}{LC} \Rightarrow I^2 = i^2 + \omega^2 q^2 \Rightarrow \mathbf{q = \pm\frac{\sqrt{I^2 - i^2}}{\omega}}$$

γ. δίνονται δύο τυχαίες χρονικές στιγμές και ζητείται το μέγιστο φορτίο ή το μέγιστο ρεύμα:

$$\left.\begin{matrix} E = U_{E_1} + U_{B_1} \\ E = U_{E_2} + U_{B_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow U_{E_1} + U_{B_1} = U_{E_2} + U_{B_2} \Rightarrow \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{q_1^2}{2C} = \frac{1}{2}Li_2^2 + \frac{q_2^2}{2C} \Rightarrow i_1^2 + \frac{q_1^2}{LC} = i_2^2 + \frac{q_2^2}{LC} \Rightarrow$$

$i_1^2 + \omega^2 q_1^2 = i_2^2 + \omega^2 q_2^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{i_2^2 - i_1^2}{q_1^2 - q_2^2} \Rightarrow \mathbf{\omega = \sqrt{\frac{i_2^2 - i_1^2}{q_1^2 - q_2^2}}}$ και αφού βρούμε την κυκλική συχνότητα ξαναγυρίζουμε στην Α.Δ.Ε. και βρίσκουμε το μέγιστο φορτίο ή το μέγιστο ρεύμα. (όπως πιο πάνω $I^2 = i^2 + \omega^2 q^2$ **ή** $Q^2 = \frac{i^2}{\omega^2} + q^2$).

Εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας όταν δίνεται μια σχέση μεταξύ ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου και ενέργειας μαγνητικού πεδίου και ζητείται το φορτίο q ή η ένταση του ρεύματος i.

Για να υπολογίσουμε το φορτίο q ή την ένταση του ρεύματος i σε μια χρονική στιγμή, για την οποία δίνεται μια σχέση μεταξύ ενέργειας ηλεκτρικού και ενέργειας μαγνητικού πεδίου, εργαζόμαστε ως εξής:

α. Γράφουμε τη σχέση που δίνεται, π.χ. $U_E = 3U_B$.

β. Αν ζητείται το **φορτίο q**, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στη δοθείσα σχέση για να "απαλλαγούμε" από την U_B και στη συνέχεια δουλεύουμε όπως και στις μηχανικές ταλαντώσεις. Οπότε:

$$U_E = 3(E - U_E) \Rightarrow 4U_E = 3E \Rightarrow 4\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = 3\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow \boxed{q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}Q}$$

γ. Αν ζητείται **η ένταση του ρεύματος**, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στη δοθείσα σχέση, επιλύουμε ως προς την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου και αντικαθιστούμε:

$$U_E = 3U_B \Rightarrow E - U_B = 3U_B \Rightarrow 4U_B = E \Rightarrow 4\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \boxed{i = \pm\frac{I}{2}}$$

☞ **Οι αντιστοιχίες μεγεθών μεταξύ του συστήματος μάζα - ελατήριο (m-k) και του ιδανικού κυκλώματος LC**

Ελατήριο – μάζα	**Κύκλωμα LC**
Απομάκρυνση x:	Φορτίο q
Ταχύτητα υ	Ένταση ρεύματος i
Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$	Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Κινητική ενέργεια του σώματος $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	Ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου $U_E = \frac{1}{2}Li^2$
Σταθερά του ελατηρίου k	Αντίστροφο της χωρητικότητας $\frac{1}{C}$
Μάζα του σώματος m	Συντελεστής αυτεπαγωγής του ιδανικού πηνίου L