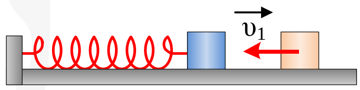
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΡΟΥΣΗ.

Θα μελετήσουμε τώρα συστήματα που η ταλάντωση ξεκινά εξαιτίας μίας κρούσης ή έχουμε ήδη μία ταλάντωση και κάπου στην πορεία συμβαίνει και μία κρούση.

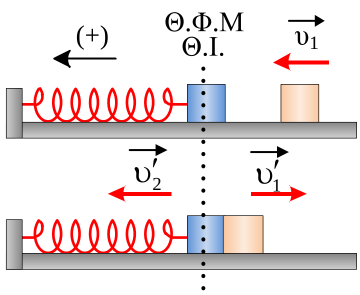
1.Α. Σώμα που κινείται με κάποια ταχύτητα συγκρούεται ανελαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.



Σώμα μάζας m_1 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_2 ανελαστικά που βρίσκεται δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_2 αν το σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα μέτρου υ'_1 αντιθέτου φοράς με την αρχική.



Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = -m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon'_1}{m_2}$$

Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. της ταλάντωσης οπότε η ταχύτητα $\vec{\upsilon'_2}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης και ισχύει $\upsilon'_2 = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \mathbf{A = \frac{\upsilon'_2}{\omega}}$, κυκλική συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση

$$D = k = m_2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση

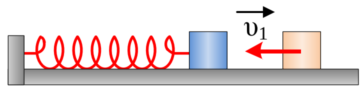
$$K_{max} = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \mathbf{A = \upsilon'_2\sqrt{\frac{m_2}{k}}}$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = 0 με υ > 0, άρα δεν έχουμε αρχική φάση, οπότε: $x = A\eta\mu\omega t$.

1.Β. Σώμα που κινείται με κάποια ταχύτητα συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.

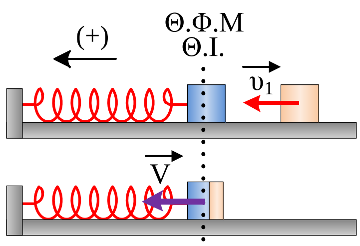
Σώμα μάζας m_1 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_2 πλαστικά που βρίσκεται δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.



Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).



$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. της ταλάντωσης οπότε η ταχύτητα $\vec{V}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης και ισχύει $V = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \mathbf{A = \frac{V}{\omega}}$, κυκλική συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση $D = k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση

$$K_{max} = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \mathbf{A = V\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

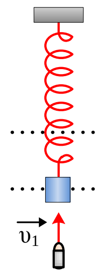
Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = 0 με υ > 0, άρα δεν έχουμε αρχική φάση, οπότε: $x = A\eta\mu\omega t$.

Σημείωση: Είδαμε μία περίπτωση ανελαστικής κρούσης σε οριζόντιο ελατήριο, ακριβώς τα ίδια πράγματα ισχύουν και στις περιπτώσεις του κατακόρυφου ελατηρίου ή του ελατηρίου σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο στην πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ή οριζόντιο ελατήριο αφού το βάρος επηρεάζει τη Θ.Ι. της ταλάντωσης, έτσι αλλαγή βάρους συνεπάγεται και αλλαγή Θ.Ι.

2.Α. Πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ελατήριο με το πάνω άκρο στην οροφή.

Σώμα μάζας m_1 εκτοξεύεται προς τα πάνω προς το κατακόρυφο ελατήριο όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2, η κρούση τους είναι πλαστική και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ.



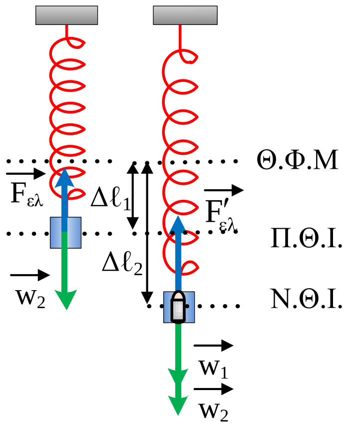
Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Το σώμα m_2 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_2 = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k}}$

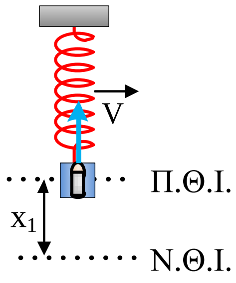
Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 = F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 g + m_2 g = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_2 = \frac{m_1 g + m_2 g}{k}}$$



Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:



$x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g + m_2 g}{k} - \dfrac{m_2 g}{k} \Rightarrow \mathbf{x_1 = \dfrac{m_1 g}{k}}$ (δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m_1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.

Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2, \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Φ.Ι. όπου $x_1 = \dfrac{m_1 g}{k}$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \mathbf{A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)V^2}{k} + x_1^2}}$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

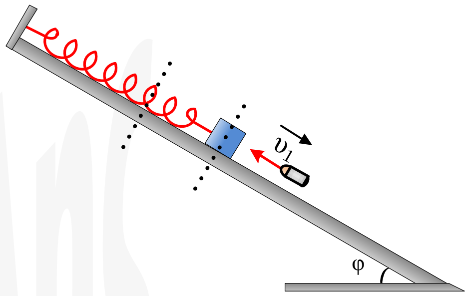
Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \neq 0$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $A\eta\mu\varphi_0 = \pm x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{\pm x_1}{A}$.

Το πρόσημο εξαρτάται από τη φορά που θα πάρουμε ως θετική, έτσι αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα πάνω τότε έχουμε $x_1 > 0$ και $V > 0$, ενώ αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα κάτω τότε έχουμε $x_1 < 0$ και $V < 0$.

2.Β. Πλαστική κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο με το πάνω άκρο στην κορυφή.

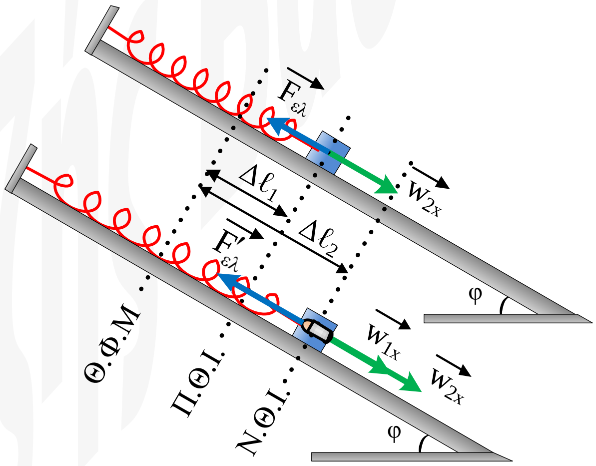
Σώμα μάζας m_1 εκτοξεύεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2 δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k, η κρούση τους είναι πλαστική και μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ.



Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

Το σώμα m_2 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{2x}=F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_1 = \dfrac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k}}$



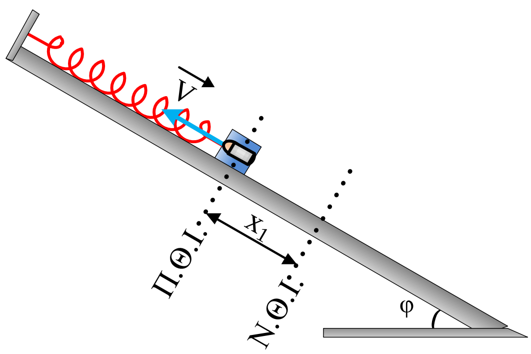
(Στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί οι κάθετες στην κίνηση δυνάμεις για χάριν απλότητας)

Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{1x}+w_{2x}=F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell_2 = \dfrac{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}{k}}$$

Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:



$$x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}{k} - \frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = \frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k}}$$

(δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m_1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.

Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{F}_{ελ}$, $\vec{N}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{υ}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{συσ} \Rightarrow m_1 υ_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1 υ_1}{m_1 + m_2}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Φ.Ι. όπου $x_1 = \dfrac{m_1 gημφ}{k}$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \mathbf{A} = \sqrt{\frac{\mathbf{(m_1 + m_2)V^2}}{\mathbf{k}} + \mathbf{x}_1^2}$$

3. Πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ελατήριο με το κάτω άκρο στο δάπεδο.

Εδώ τα πράγματα είναι ακριβώς τα ίδια με πριν μόνο το σχήμα αλλάζει οπότε δεν έχουμε να πούμε κάτι νέο.