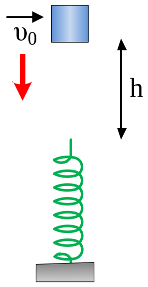
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΣΩΜΑ ΑΡΧΙΚΑ ΝΑ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΕΚΤΟΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ.

Θα μελετήσουμε τώρα συστήματα που το σώμα αφήνεται από κάποιο ύψος να καρφωθεί στο ελατήριο ή το εκτοξεύουμε από κάτω προς τα πάνω με σκοπό πάλι να καρφωθεί (και να μείνει) στο ελατήριο.

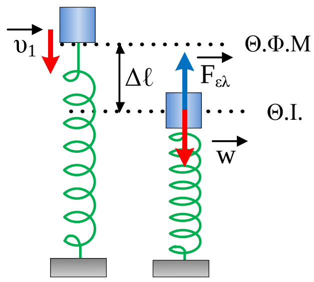
1. Σώμα που αφήνεται ή εκτοξεύεται από κάποιο ύψος h.



Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα κάτω από ύψος h προς τα κατακόρυφο ελατήριο στο οποίο καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και μετά εκτελεί ταλάντωση.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.



Την στιγμή που το σώμα φτάνει στο ελατήριο έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου υ_1 η οποία μπορεί να βρεθεί είτε με Θ.Μ.Κ.Ε είτε με Α.Δ.Μ.Ε. είτε με τύπους βολής προς τα κάτω (στην περίπτωση που $\upsilon_0 = 0$ έχουμε ελεύθερη πτώση). Εδώ θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgh \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{2gh + \upsilon_0^2}}$$

Ομοίως για ελεύθερη πτώση $K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = mgh \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{2gh}}$

Η ταλάντωση αρχίζει από τη στιγμή που το σώμα ακουμπά στο ελατήριο. Η απομάκρυνση τη στιγμή εκείνη από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η απόσταση Θ.Φ.Μ. και Θ.Ι. (Δℓ όπως φαίνεται στο σχήμα).

Σε Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = \frac{mg}{k}}$

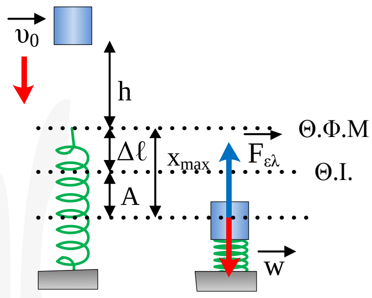
Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη Θ.Φ.Μ. όπου x = Δℓ.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{x=\Delta\ell}{\Rightarrow} \boldsymbol{A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{k} + \Delta\ell^2}}$$

Σημείωση: Παραλλαγή της περίπτωσης αυτής είναι να μας δίνεται η μέγιστη παραμόρφωση που υφίσταται το ελατήριο ($\Delta\ell_{max}$) και να μας είναι άγνωστη η σταθερά του ελατηρίου k.

Ας το δούμε παρακάτω.

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από ύψος h πάνω από το άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου $υ_0$, μόλις το σώμα καρφωθεί στο ελατήριο χωρίς απώλειες ενέργειας το παραμορφώνει και σταματά όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $Δ\ell_{max}$ ή x_{max}. Να βρεθούν η σταθερά του ελατηρίου και το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα.



Η ταχύτητα τη στιγμή της επαφής σώματος και ελατηρίου είναι:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = mgh \Rightarrow \mathbf{υ_1} = \sqrt{\mathbf{2gh + υ_0^2}}$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $Σ\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = kΔ\ell \Rightarrow \mathbf{Δ\ell} = \frac{\mathbf{mg}}{\mathbf{k}}$ (1)

Για την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $x_{max} = A + Δ\ell \Rightarrow x_{max} = A + \frac{mg}{k}$ (2) και αν πάρουμε την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση θα προκύψει: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$

$$k(x_{max} - Δ\ell)^2 = mυ_1^2 + kΔ\ell^2 \Rightarrow kx_{max}^2 + kΔ\ell^2 - 2kx_{max}Δ\ell = mυ_1^2 + kΔ\ell^2 \Rightarrow kx_{max}^2 - 2kx_{max}\frac{mg}{k} = mυ_1^2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{mυ_1^2 + 2mgx_{max}}{x_{max}^2}.$$

Μετά την εύρεση της σταθεράς με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης.

Στο ίδιο αποτέλεσμα και πιο απλά καταλήγουμε αν κάνουμε εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση έως την θέση της μέγιστης παραμόρφωσης.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = W_w + W_{F_{ελ}} \Rightarrow -\frac{1}{2}mυ_0^2 = mg(h + x_{max}) - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{\mathbf{mυ_0^2 + 2mg(h + x_{max})}}{\mathbf{x_{max}^2}}.$$

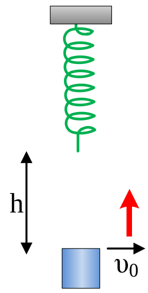
β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $|x| = Δ\ell$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = \pm\Delta\ell \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = \pm\Delta\ell \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{\pm\Delta\ell}{A}$.

Το πρόσημο εξαρτάται από τη φορά που θα πάρουμε ως θετική, έτσι αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα πάνω τότε έχουμε $x = +\Delta\ell$ και $\upsilon_1 < 0$, ενώ αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα κάτω τότε έχουμε $x = -\Delta\ell$ και $\upsilon_1 > 0$.

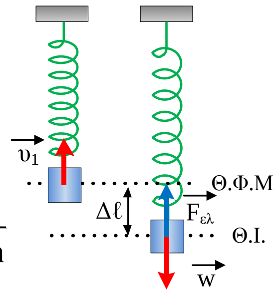
2. Σώμα που εκτοξεύεται από κάποιο ύψος h προς τα πάνω.



Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω από ύψος h προς το κατακόρυφο ελατήριο στο οποίο καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και μετά εκτελεί ταλάντωση.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.



Την στιγμή που το σώμα φτάνει στο ελατήριο έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου υ_1 η οποία μπορεί να βρεθεί είτε με Θ.Μ.Κ.Ε είτε με Α.Δ.Μ.Ε. είτε με τύπους βολής προς τα πάνω. Εδώ θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}}$$

Η ταλάντωση αρχίζει από τη στιγμή που το σώμα ακουμπά στο ελατήριο. Η απομάκρυνση τη στιγμή εκείνη από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η απόσταση Θ.Φ.Μ. και Θ.Ι. (Δℓ όπως φαίνεται στο σχήμα).

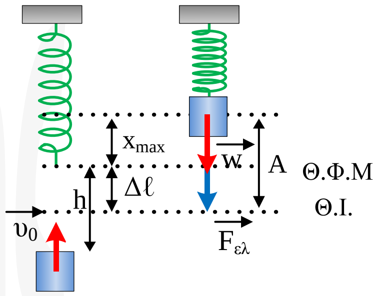
Σε Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = \dfrac{mg}{k}}$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη Θ.Φ.Μ. όπου x = Δℓ.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{x=\Delta\ell}{\Rightarrow} \boldsymbol{A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{k} + \Delta\ell^2}}$$

Σημείωση: Παραλλαγή της περίπτωσης αυτής είναι να μας δίνεται η μέγιστη παραμόρφωση που υφίσταται το ελατήριο ($\Delta\ell_{max}$) και να μας είναι άγνωστη η σταθερά του ελατηρίου k.

Ας το δούμε παρακάτω.



Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από προς τα πάνω όπου σε ύψος h βρίσκεται το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου υ_0. Μόλις το σώμα καρφωθεί στο ελατήριο χωρίς απώλειες ενέργειας το παραμορφώνει και σταματά όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell_{max}$ ή x_{max}. Να βρεθούν η σταθερά του ελατηρίου και το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα.

Η ταχύτητα τη στιγμή της επαφής σώματος και ελατηρίου είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}}$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = \frac{mg}{k}}$ (1)

Για την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $x_{max} = A - \Delta\ell \Rightarrow x_{max} = A - \frac{mg}{k}$ (2) και αν πάρουμε την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση θα προκύψει: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$

$$k(x_{max} + \Delta\ell)^2 = m\upsilon_1^2 + k\Delta\ell^2 \Rightarrow kx_{max}^2 + k\Delta\ell^2 + 2kx_{max}\Delta\ell = m\upsilon_1^2 + k\Delta\ell^2 \Rightarrow kx_{max}^2 + 2kx_{max}\frac{mg}{k} = m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{m\upsilon_1^2 - 2mgx_{max}}{x_{max}^2}.$$

Μετά την εύρεση της σταθεράς με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης.

Στο ίδιο αποτέλεσμα και πιο απλά καταλήγουμε αν κάνουμε εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση έως την θέση της μέγιστης παραμόρφωσης.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg(h + x_{max}) - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow \boldsymbol{k = \frac{m\upsilon_0^2 - 2mg(h + x_{max})}{x_{max}^2}}.$$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα.

Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $|x| = \Delta\ell$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = \pm\Delta\ell \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = \pm\Delta\ell \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{\pm\Delta\ell}{A}$.

Το πρόσημο εξαρτάται από τη φορά που θα πάρουμε ως θετική, έτσι αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα πάνω τότε έχουμε $x = +\Delta\ell$ και $\upsilon_1 > 0$, ενώ αν θεωρήσουμε θετική τη φορά προς τα κάτω τότε έχουμε $x = -\Delta\ell$ και $\upsilon_1 < 0$.