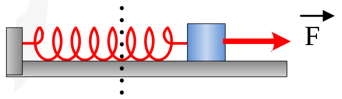
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΠΟΥ ΚΑΤΑΡΓΕΙΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΡΧΙΖΕΙ Η ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Θα μελετήσουμε τώρα συστήματα που διεγείρονται σε ταλάντωση μέσω εξωτερικής δύναμης που μπορεί να είναι (όπως θα δούμε παρακάτω) σταθερή, μεταβλητού μέτρου σταθερής κατεύθυνσης και τέτοια ώστε το σύστημα να επιταχύνεται ευθύγραμμα και ομαλά.

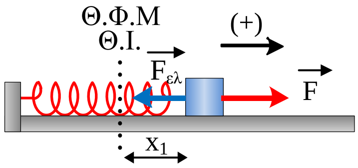
1.Α. Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης.



Σε σώμα μάζας m που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε σταθερή δύναμη $\vec{F}$ έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι την θέση $x = x_1$ και μετά η σταθερή δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.



Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα. Άρα: $E = W_F = F\cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = F\cdot x_1 \Rightarrow \mathbf{A = \sqrt{\frac{2F\cdot x_1}{D}}}$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, θεωρώντας ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = x_1$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = x_1 \Rightarrow Αημφ_0 = x_1 \Rightarrow ημφ_0 = \frac{x_1}{A} \Rightarrow φ_0 = ...$ και επιλέγουμε την λύση που θα μας δώσει θετική ταχύτητα. Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow mω^2 = k \Rightarrow \mathbf{ω = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

γ. Να βρεθεί η ταχύτητα μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.

Η θέση που καταργήθηκε η δύναμη αποτελεί μία ενδιάμεση θέση για την ταλάντωση οπότε και η ταχύτητα έχει μέτρο $0 \le \upsilon \le \upsilon_{max}$. Ο υπολογισμός της μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους και εύκολα γίνεται αν έχουμε υπολογίσει την αρχική φάση να γράψουμε την χρονική εξίσωση της ταχύτητας και να θέσουμε t = 0.

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να εφαρμόσουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση αφού προηγουμένως έχουμε βρει το πλάτος και θα καταλήξουμε $E = K + U \Rightarrow ... \Rightarrow \upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

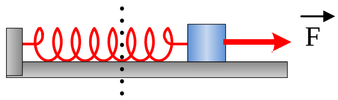
Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε και Θ.Μ.Κ.Ε ή Α.Δ.Ε. για το σύστημα από την στιγμή της άσκησης της δύναμης $\vec{F}$ έως και την κατάργηση της.

$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_F + W_{F_{\varepsilon\lambda}}$ όπου το έργο της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda}^{\alpha\rho\chi} - U_{\varepsilon\lambda}^{\tau\varepsilon\lambda} = 0 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

1.Β. Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης που καταργείται στο άκρο.

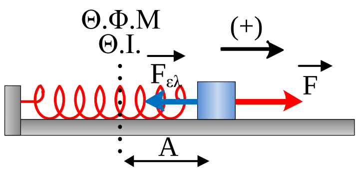
Σε σώμα μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε σταθερή δύναμη $\vec{F}$ έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι ότου να ακινητοποιηθεί και μετά η δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.



Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.

Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα, αλλά επειδή ασκείται μέχρι να ακινητοποιηθεί το σώμα



σημαίνει ότι φτάνει ως το άκρο της ταλάντωσης που εκτελέσει μετά την κατάργηση της δύναμης το σύστημα. Άρα: $E = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = F \cdot A \Rightarrow \mathbf{A = \frac{2F}{D}}$.

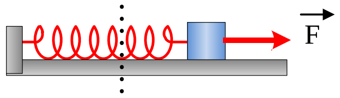
β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, θεωρώντας ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = A, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}}\ \mathbf{rad}$.

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

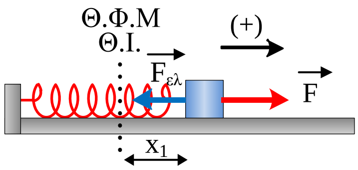
2. Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου.



Σε σώμα μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο που δίνεται από τη σχέση $F = \alpha + \beta x$ (όπου α, β θετικές σταθερές) έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι την θέση $x = x_1$ και μετά η δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

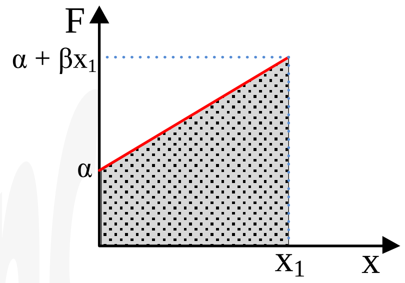
α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.



Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα. Επειδή το μέτρο της $\vec{F}$ μεταβάλλεται το έργο της υπολογίζεται με εμβαδομέτρηση, από τη θέση x = 0 έως τη θέση $x = x_1$.

Έχουμε: για $x = 0 \rightarrow F = \alpha$ και

για $x = x_1 \rightarrow F = \alpha + \beta x_1$ οπότε σχηματίζεται το διπλανό τραπέζιο.



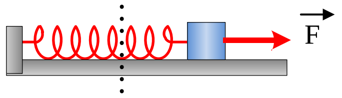
Άρα: $E = W_F =$ εμβ.$= \dfrac{\alpha + (\alpha + \beta x_1)}{2} \cdot x_1$

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, θεωρώντας ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = x_1$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = x_1 \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{x_1}{A} \Rightarrow \varphi_0 = \ldots$ και επιλέγουμε την λύση που θα μας δώσει θετική ταχύτητα. Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$.

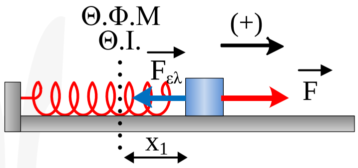
3. Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου που προκαλεί σταθερή επιτάχυνση.



Σε σώμα μάζας m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k, όπως στο σχήμα ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. Η δύναμη ασκείται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει επιμήκυνση $x = x_1$ και μετά η δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.

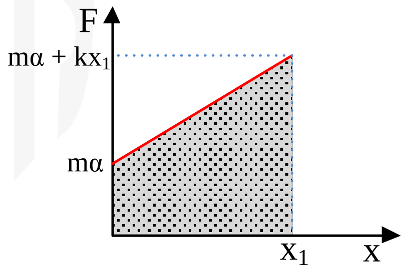
Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν εδώ είναι:

α. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.



Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα. Επειδή έχουμε σταθερή επιτάχυνση ισχύει:

$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_{ελ} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F - kx = m\alpha \Rightarrow F = kx + m\alpha$.



Βλέπουμε εδώ ότι τελικά καταλήγουμε στην προηγούμενη περίπτωση, και αυτό ισχύει γενικά όταν ο συντελεστής του x ταυτίζεται με την σταθερά του ελατηρίου, (συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις έχουμε mα = β, k = α).

Έχουμε: για $x = 0 \rightarrow F = m\alpha$ και

για $x = x_1 \rightarrow F = m\alpha + kx_1$ οπότε σχηματίζεται το διπλανό τραπέζιο.

Άρα: $E = W_F =$ εμβ.$= \dfrac{m\alpha + (m\alpha + kx_1)}{2} \cdot x_1$, και $E = \dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\dfrac{2E}{D}}$.

Σημείωση: Σε μία τέτοια περίπτωση μπορεί να μας δίνεται η δύναμη, χωρίς να αναφέρεται ότι το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση αλλά να μας ζητείται να το αποδείξουμε. Οπότε αν συναντήσουμε μία τέτοια περίπτωση ξεκινάμε υπολογίζοντας την συνισταμένη δύναμη και περιμένουμε να μας βγει σταθερός αριθμός π.χ. $\Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = ... =$ σταθ.

β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, θεωρώντας ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$.

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενα μαθήματα η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = x_1$, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = x_1 \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \dfrac{x_1}{A} \Rightarrow \varphi_0 = ...$ και επιλέγουμε την λύση που θα μας δώσει θετική ταχύτητα. Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

Η ταχύτητα την στιγμή που βρίσκεται στη θέση $x = x_1$, μπορεί να υπολογιστεί είτε από την χρονοεξίσωση της, είτε από το Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση $x = 0$ έως τη θέση $x = x_1$, είτε με τύπους κινηματικής $x_1 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_1}{\alpha}}$ και $\upsilon = \alpha t$.

Σημείωση: Στις παραπάνω περιπτώσεις μεταβλητής δύναμης, μπορεί αντί να μας δίνουν τη θέση στην οποία η δύναμη καταργείται να μας λέει η άσκηση ότι η δύναμη αυτή ασκείται μέσω νήματος με όριο θραύσης γνωστό τότε: $F = F_{\theta\rho} \Rightarrow \alpha + \beta x_1 = F_{\theta\rho} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{F_{\theta\rho} - \alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$.