ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΩΜΑΤΑ ΣΕ ΕΠΑΦΗ

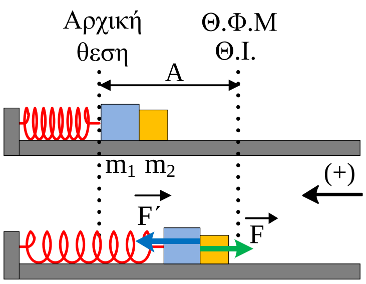
Σε πολλές περιπτώσεις έχουμε δύο σώματα που εκτελούν ταλάντωση τα οποία βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους. Η επαφή αυτή μπορεί να υπάρχει στη διάρκεια της ταλάντωσης είτε να χάνεται σε κάποια θέση. Ας δούμε αυτές τις περιπτώσεις.

1.Α. Σύστημα σωμάτων σε επαφή στο οριζόντιο επίπεδο με ελατήριο συνδεδεμένο στο ένα σώμα.

Σώμα μάζας m_1 έχει το ένα άκρο στερεωμένο σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο και το άλλο άκρο του βρίσκεται σε επαφή με σώμα μάζας m_2. Το όλο σύστημα βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Συμπιέζουμε κατά Α τα δύο σώματα όπως φαίνεται στο σχήμα και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να ταλαντωθεί.

Τα ερωτήματα που θα αντιμετωπίσουμε σε αυτή την περίπτωση είναι:

α. Να βρεθεί το σημείο που τα σώματα χάνουν την επαφή.



Η δύναμη επαφής $\vec{F}$ που το σώμα m_2 δέχεται από το σώμα m_1 είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του. Οπότε για το σώμα m_2 ισχύει: $\Sigma\vec{F}_2 = -D_2\vec{x} \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} F = -m_2\omega^2 x$ ή μπορούμε να πούμε και: $\Sigma\vec{F}_2 = m_2\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} = m_2(-\omega^2\vec{x}) \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} F = -m_2\omega^2 x$

Η δύναμη επαφής $\vec{F}$ μηδενίζεται στη θέση όπου x = 0. Συνεπώς τα δύο σώματα χάνουν την μεταξύ τους επαφή στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

Το σύστημα των δύο αρχικά κάνει ταλάντωση με $D = k \Rightarrow (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$, ενώ μετά τη Θ.Ι. το σώμα Σ_1 κάνει ταλάντωση με $D' = k \Rightarrow m_1\omega'^2 = k \Rightarrow \omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$, και για το κάθε σώμα ισχύει: $D_1 = m_1\omega^2$ και $D_2 = m_2\omega^2$.

β. Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης:

α′ τρόπος: Με διατήρηση της ενέργειας:

Μετά την απώλεια επαφής το σώμα Σ_1 συνεχίζει να ταλαντώνεται (με διαφορετική ενέργεια ταλάντωσης) ενώ το σώμα Σ_2 (με ταχύτητα $\upsilon_2 = \upsilon_{max} = \omega A$) κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, αφού στην διεύθυνση της κίνησης του δεν δέχεται καμία δύναμη.

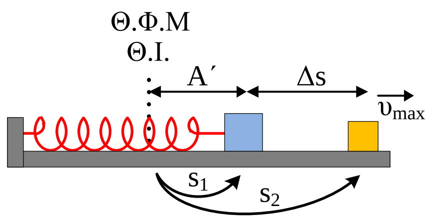
$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\tau\alpha\lambda} = E'_{\tau\alpha\lambda} + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \mathbf{A' = \sqrt{A^2 - \frac{m_2\upsilon_{max}^2}{k}}},$$

β′ τρόπος: Η ταλάντωση των Σ_1, Σ_2 "τελειώνει" στην Θ.Ι., οπότε τα σώματα έχουν μέγιστη ταχύτητα υ_{max} και η ταλάντωση του Σ_1 αρχίζει από την Θ.Ι. (δεν έχουμε αλλαγή Θ.Ι. Παραμένει η Θ.Φ.Μ. ως θέση ισορροπίας και για την νέα ταλάντωση) οπότε έχει επίσης μέγιστη ταχύτητα υ_{max} κατά την έναρξη της νέας ταλάντωσης . Άρα:

$$\upsilon_{max} = \upsilon'_{max} \Rightarrow \omega A = \omega' A' \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}A = \sqrt{\frac{k}{m_1}}A' \Rightarrow \mathbf{A' = A\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}}$$

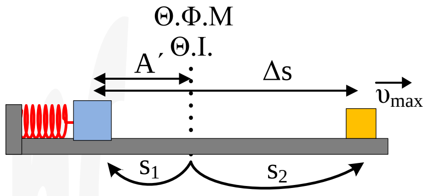
γ. Πόσο απέχουν τα δύο σώματα όταν το Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για 1η φορά;

Το Σ_1 ακινητοποιείται για πρώτη φορά σε χρόνο $\Delta t = \frac{T'}{4}$ μετά την έναρξη της ταλάντωσής του και έχει διανύσει διάστημα ως τότε από την Θ.Ι. $s_1 = A'$. Το Σ_2 κάνει Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα $\upsilon_{max} = \omega A$. (Την ταχύτητα που είχε τη στιγμή της αποχώρησης από το Σ_1) και στον ίδιο χρόνο διανύει διάστημα $s_2 = \upsilon_{max}\Delta t$ $\Rightarrow s_2 = \upsilon_{max}\frac{T'}{4}$. Άρα τα δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους $\Delta s = s_2 - s_1$.



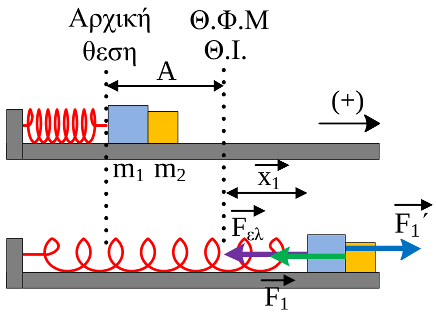
δ. Πόσο απέχουν τα σώματα όταν το Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για 2^{η} φορά;

Ο χρόνος που χρειάζεται το Σ_1 ακινητοποιηθεί για 2^{η} φορά είναι $\Delta t = \frac{3T'}{4}$. Το Σ_1 θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο και θα απέχει από την Θ.Ι. $s_1 = A'$ προς τα αριστερά ενώ το Σ_2 στο ίδιο διάστημα θα έχει διανύσει $s_2 = \upsilon_{max} \cdot \Delta t = \upsilon_{max} \cdot \frac{3T'}{4}$. Άρα τα Σ_1, Σ_2 απέχουν μεταξύ τους $\Delta s = s_1 + s_2$



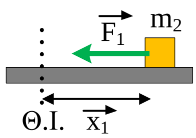
1.Β. Σύστημα σωμάτων σε επαφή στο οριζόντιο επίπεδο με ελατήριο συνδεδεμένο στο ένα σώμα.

Σώμα μάζας m_1 είναι κολλημένο με άλλο σώμα μάζας m_2 με μία κόλλα που αντέχει δύναμη έως την τιμή F_1. συμπιέζουμε τα δύο σώματα έτσι ώστε το πλάτος να είναι τέτοιο που η επαφή να χάνεται σε μία ενδιάμεση θέση της ταλάντωσης.



Προφανώς η αποκόλληση θα συμβεί αφού τα σώματα περάσουν την Θ.Ι.

Για το σώμα μάζας m_2 θα ισχύει: $\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow F_{κόλλας} = -m_2\omega^2 x$



και για το μέτρο της δύναμης από την κόλλα την στιγμή που χάνεται η επαφή ισχύει:

$$F_1 = m_2\omega^2 x_1 \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{F_1}}{\mathbf{m_2\omega^2}}$$

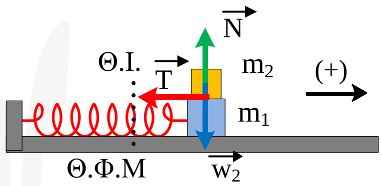
Αφού τώρα έχουμε βρει την θέση της αποκόλλησης μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση και να βρούμε την ταχύτητα που έχουν τα σώματα εκείνη τη στιγμή.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\ m_1 + m_2\ \ \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1} = \sqrt{\frac{\mathbf{k(A^2 - x_1^2)}}{\mathbf{m_1 + m_2}}}$$

και αν θέλουμε να βρούμε πάλι το νέο πλάτος μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση όπως παρακάτω:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \mathbf{A'} = \sqrt{\frac{\mathbf{m_1\upsilon_1^2}}{\mathbf{k}} + \mathbf{x_1^2}}$$

2. Δύο σώματα σε οριζόντιο ελατήριο που ταλαντώνονται με την βοήθεια της τριβής.



Έστω ότι το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο, ενώ μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής μ. Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$

Τα ερωτήματα που θα συναντήσουμε στην περίπτωση αυτή είναι:

α. Να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς για κάθε σώμα χωριστά.

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= m_1\omega^2 \\ D_2 &= m_2\omega^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = D_1 + D_2$$

β. Να βρεθεί το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος χωρίς να έχουμε ολίσθηση.

Για το σώμα m_2 έχουμε: $\Sigma\vec{F} = -D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{T}_{\sigma\tau\alpha\tau} = -D_2\vec{x} \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} = -D_2 x \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} = -m_2\omega^2 x$

Για το μέτρο της στατικής τριβής έχουμε: $T_{\sigma\tau\alpha\tau} \le \mu_s N \Rightarrow m_2\omega^2 x \le \mu_s m_2 g \Rightarrow x \le \dfrac{\mu_s g}{\omega^2} \Rightarrow \mathbf{A_{o\rho\iota\alpha\kappa o}} = \dfrac{\boldsymbol{\mu_s g}}{\boldsymbol{\omega^2}}$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η στατική τριβή χωρίς να υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $\mathbf{T_{\sigma\tau\alpha\tau.(max)} = m_2\omega^2 A_{o\rho}}$

3. Δύο σώματα σε κεκλιμένο επίπεδο με ελατήριο που ταλαντώνονται με την βοήθεια της τριβής.

Έστω ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, ενώ μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής μ. Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$

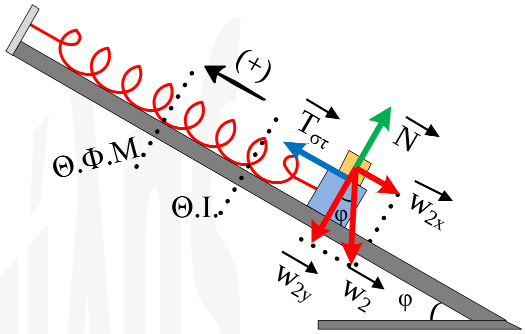
Τα ερωτήματα που θα συναντήσουμε στην περίπτωση αυτή είναι:

α. Να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς για κάθε σώμα χωριστά.

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= m_1\omega^2 \\ D_2 &= m_2\omega^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = D_1 + D_2$$

β. Να βρεθεί το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος χωρίς να έχουμε ολίσθηση.

Για το σώμα m_2 έχουμε:



$$\Sigma\vec{F} = -D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{T}_{στατ} + \vec{w}_{2x} = -D_2\vec{x} \Rightarrow T_{στατ} - w_{2x} = -D_2 x \Rightarrow$$

$$T_{στατ} = m_2 g ημφ - m_2\omega^2 x$$

Δηλαδή το μέτρο της στατικής τριβής γίνεται μέγιστο στην ακραία αρνητική θέση (x = –A) δηλαδή

$T_{στατ.(max)} = m_2 g ημφ + m_2\omega^2 A$

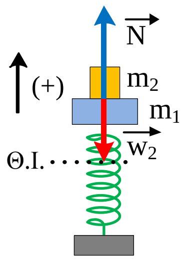
Για το μέτρο της στατικής τριβής έχουμε:

$$T_{στατ} \le \mu_s N \Rightarrow m_2 g ημφ + m_2\omega^2|x| \le \mu_s m_2 g συνφ \Rightarrow |x| \le \frac{\mu_s g συνφ - g ημφ}{\omega^2} \Rightarrow \mathbf{A_{οριακο}} = \frac{\mu_s g συνφ - g ημφ}{\omega^2}$$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η στατική τριβή χωρίς να υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $T_{στατ.(max)} = m_2\omega^2 A_{ορ} + m_2 g ημφ$

4. Δύο σώματα σε κατακόρυφο ελατήριο

Εφόσον τα δύο σώματα ταλαντώνονται χωρίς να χάνεται η επαφή, θα έχουν κοινό πλάτος και κοινή κυκλική συχνότητα $D = (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$



Τα ερωτήματα που θα συναντήσουμε στην περίπτωση αυτή είναι:

α. Να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς για κάθε σώμα χωριστά.

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= m_1\omega^2 \\ D_2 &= m_2\omega^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = D_1 + D_2$$

β. Να βρεθεί το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος ώστε να μην χάνεται η επαφή.

Για το σώμα μάζας m_2 ισχύει $\Sigma\vec{F} = -D_2\vec{x} \Rightarrow \vec{N} + m_2\vec{g} = -m_2\omega^2\vec{x} \Rightarrow N - m_2 g = -m_2\omega^2 x \Rightarrow N = m_2(g - \omega^2 x)$

Το σώμα χάνει την επαφή με το δίσκο, όταν θα έχουμε N = 0.

Μέγιστο πλάτος έχουμε όταν το σώμα οριακά χάνει την επαφή του.

Για να έχουμε επαφή θα πρέπει $N \geq 0 \Rightarrow m_2(g-\omega^2 x) \geq 0 \Rightarrow g-\omega^2 x \geq 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{g}{\omega^2}$

Άρα το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι: $\mathbf{A = \dfrac{g}{\omega^2}}$

γ. Στην περίπτωση που Α > A_{op} να βρεθεί η ταχύτητα την στιγμή του αποχωρισμού και το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα μετά τον αποχωρισμό.

Λίγο πριν χαθεί η επαφή τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ.

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην θέση που χάνεται η επαφή:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{2}kA_{op}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon} = \sqrt{\frac{\mathbf{k(A^2 - A_{op}^2)}}{\mathbf{m_1 + m_2}}}$$

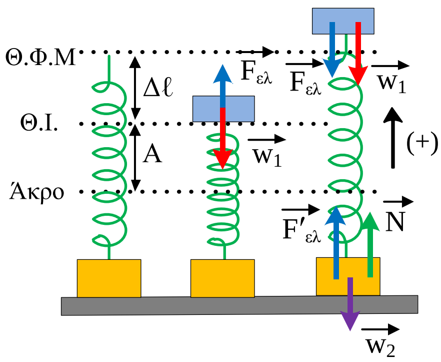
Για να βρούμε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα m_2 μετά το χάσιμο επαφής από το σώμα m_1 εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή που χάνεται η επαφή και έχουμε ταχύτητα υ που υπολογίσαμε παραπάνω μέχρι το μέγιστο ύψος όπου μηδενίζεται η ταχύτητα στιγμιαία.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = m_2 g h_{max} \Rightarrow \mathbf{h_{max}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}^2}{\mathbf{2g}}.$$

4. Δύο σώματα σε κατακόρυφο ελατήριο και το χάσιμο επαφής του κάτω σώματος

Τα ερωτήματα που θα συναντήσουμε στην περίπτωση αυτή είναι:

Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1 ώστε να μην χάνει την επαφή με το έδαφος το σώμα m_2.



Το σώμα m_2 κινδυνεύει να χάσει την επαφή με το δάπεδο, όταν το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί, ώστε η $F_{\varepsilon\lambda}$ να έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα. Στην οριακή περίπτωση που μόλις χάνεται η επαφή θα έχουμε N = 0 άρα:

Για το σώμα m_1 (Θεωρώντας την πάνω ως θετική φορά)

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow -F_{\varepsilon\lambda} - m_1 g = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = kx - m_1 g$$

Για το σώμα m_2: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + N = w_2 \Rightarrow N = m_2 g - F_{\varepsilon\lambda}$

Για να υπάρχει επαφή θα πρέπει η δύναμη επαφής $\vec{N}$ να είναι θετική.

$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - F_{\varepsilon\lambda} \geq 0 \Rightarrow m_2 g \geq F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g \geq kx - m_1 g \Rightarrow m_2 g + m_1 g \geq kx \Rightarrow x \leq \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Οπότε η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης είναι και το πλάτος της ταλάντωσης: $\mathbf{A_{max} = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{k}}$