

Σώμα δεμένο μέσω νήματος με κατακόρυφο ελατήριο και μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα σώμα που έχει δεθεί μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος με κατακόρυφο ελατήριο.

α. Να βρεθεί το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης που μπορεί να εκτελεί το σώμα χωρίς να χαλαρώνει το νήμα.

β. αν το σώμα το αρχικά το απομακρύνουμε από τη Θ.Ι. του σε απόσταση $A > A_{\max}$, να βρεθεί σε πόσο πάνω από τη Θ.Ι. θα ανέβει το σώμα και σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος μετά το χαλάρωμα του νήματος.

Λύση

α. Στο διπλανό σχήμα έχουμε στην Θ.Ι.

Ελατήριο: $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} = -\vec{T} \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} T = F_{ελ} \Rightarrow T = k\Delta\ell$

Νήμα: Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει: $\vec{T} = -\vec{T}' \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} T = T'$

Σώμα: $\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T}' + \vec{w} = 0 \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} T' = w \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k}$

Για την ταλάντωση του Σ σε μια τυχαία θέση ισχύει

$$\Sigma \vec{F} = -D\vec{x} \Rightarrow \vec{T}' + \vec{w} = -D\vec{x} \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} T' - w = -Dx \Rightarrow T' = mg - Dx$$

Για να έχουμε Α.Α.Τ. θα πρέπει $T' \geq 0 \Rightarrow mg - Dx \geq 0 \Rightarrow mg \geq Dx \Rightarrow x \leq \frac{mg}{D}$

ή $A_{\max} = \frac{mg}{D} = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{m\omega^2} = \frac{g}{\omega^2}$

Από την σχέση προκύπτει ότι για να μην χαλαρώνει το νήμα θα πρέπει το ελατήριο να είναι συνεχώς παραμορφωμένο ή οριακά να φτάνει στο Φ.Μ. του.

β. Αν θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα τη στιγμή της χαλάρωσης του νήματος και το ύψος που φτάνει πάνω απ' τη θέση αυτή εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε για την ταλάντωση $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \Rightarrow$

$|v| = \omega\sqrt{A^2 - \Delta\ell^2}$ και μετά εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. για το μέγιστο ύψος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} mv^2 - mgh \Rightarrow \boxed{h = \frac{v^2}{2g}}$$

Το σώμα μετά την χαλάρωση του νήματος εκτελεί βολή προς τα πάνω δηλαδή ισχύει:

$v' = v - gt \Rightarrow 0 = v - gt \Rightarrow t = \frac{v}{g}$ (ο χρόνος ανόδου).

