ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ - ΣΩΜΑ

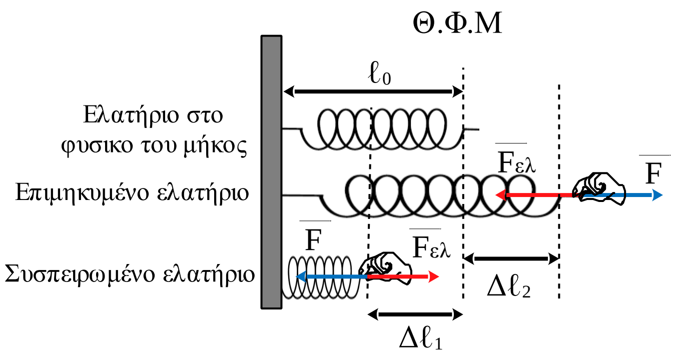
Σε όλα τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε, το ελατήριο θα είναι αβαρές και θα ικανοποιεί το νόμο του Hooke (ιδανικό ελατήριο), δηλαδή η δύναμη που ασκεί ένα ιδανικό ελατήριο έχει **μέτρο που είναι ανάλογο της παραμόρφωσης** του και **κατεύθυνση πάντα προς το φυσικό μήκος** του ελατηρίου. Δηλαδή θα υπόκειται μόνο σε ελαστικές παραμορφώσεις.

☞ Τι ονομάζουμε θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.) ενός ελατηρίου

Όταν **το ελατήριο δεν είναι συσπειρωμένο ούτε επιμηκυμένο**, λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση **φυσικού του μήκους**. Αν επιπλέον το ένα άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, η θέση του άλλου άκρου (του άκρου δηλαδή που είναι ελεύθερο να κινηθεί) ονομάζεται θέση φυσικού μήκους **(Θ.Φ.Μ.)** του ελατηρίου.

☞ Πότε ασκεί δύναμη το ελατήριο και με ποιον τύπο υπολογίζουμε το μέτρο της.

Όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο ή επιμηκυμένο, ασκεί **δύναμη και στα δύο του άκρα**. Στην περίπτωση όπου το ένα άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο (φαίνεται στο παραπάνω σχήμα), η δύναμη του ελατηρίου η οποία ασκείται στο άκρο που είναι ελεύθερο να κινείται **έχει κατεύθυνση πάντα προς τη Θ.Φ.Μ.** Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο: $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell}$ όπου **Δℓ η συσπείρωση ή η επιμήκυνση του**.



Η σταθερά k είναι χαρακτηριστικό του ελατηρίου και εκφράζει το πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε για να το παραμορφώσουμε (δηλαδή σκληρό ελατήριο μεγάλη σταθερά k και αντίστροφα).

☞ **Με ποιον τύπο υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια ενός ελατηρίου.**

Το συσπειρωμένο ή επιμηκυμένο ελατήριο έχει αποθηκευμένη **ενέργεια**, η οποία χαρακτηρίζεται ως **δυναμική ενέργεια λόγω παραμόρφωσης**. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$\mathbf{U = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2}$ όπου **Δℓ η συσπείρωση ή η επιμήκυνση** του ελατηρίου.

☞ **Πώς υπολογίζουμε το έργο της δύναμης του ελατηρίου.**

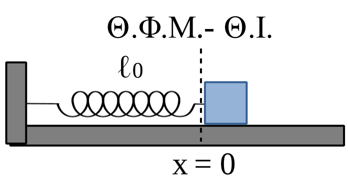
Η δύναμη του ελατηρίου είναι μια **συντηρητική δύναμη**. Εξαιτίας της η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο και αντίστροφα. Επομένως **το έργο της εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική συσπείρωση του ελατηρίου**. Όπως και για άλλες συντηρητικές δυνάμεις, έτσι και στην περίπτωση της δύναμης του ελατηρίου ισχύει:

$$\boxed{\mathbf{W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{αρχ} - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{τελ}}}$$

☞ **Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα το οποίο είναι δεμένο σε ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, αν το διεγείρουμε από την κατάσταση ισορροπίας του.**

Οι περιπτώσεις τοποθέτησης και συνδυασμού ελατηρίων είναι αρκετές, παρακάτω θα δούμε μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

Α. Οριζόντιο ελατήριο

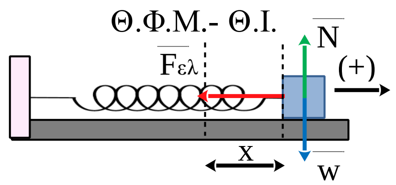


Ιδανικό ελατήριο σταθεράς k έχει το ένα του άκρο δεμένο σε ακλόνητο τοίχο, ενώ στο άλλο του άκρο έχουμε δέσει σώμα μάζας m που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί ακίνητο με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση αυτή στη διεύθυνση του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, οπότε διαπιστώνουμε ότι εκτελεί ταλάντωση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων. **Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αυτής (που είναι το μέσον μεταξύ της απόστασης των δύο**

ακραίων θέσεων) ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αφού κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από τη θέση αυτή η **συνισταμένη δύναμη** που δέχεται **ισούται με μηδέν**.

Για να αποδείξουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε μια **τυχαία θέση** της κίνησης του **η συνισταμένη δύναμη** που δέχεται είναι **ανάλογη** με την **απομάκρυνση** και έχει **αντίθετη φορά** από αυτήν. Δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. η συνισταμένη δύναμη ικανοποιεί τη σχέση **ΣF = –Dx** Για το σκοπό αυτό σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα σε μια **τυχαία θέση απομάκρυνσης x** από τη Θ.Ι. και γράφουμε τη σχέση υπολογισμού της συνισταμένης δύναμης στη θέση αυτή: $\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x = \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$

Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι., προκύπτει για την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης:

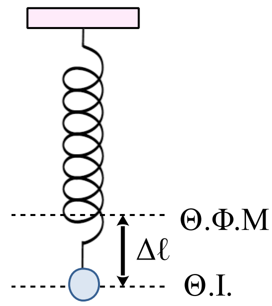


$\Sigma F = -F_{\varepsilon\lambda} = -kx$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής ΣF = –Dx, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς D = k.

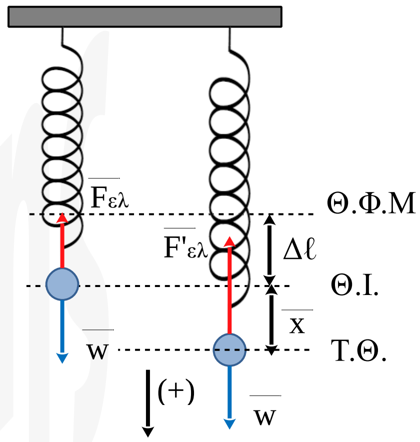
Β. Κατακόρυφο Ελατήριο

Ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k είναι σταθερά δεμένο σε ακλόνητο σημείο της οροφής, ενώ στο άλλο άκρο του έχουμε δέσει ένα σώμα μάζας m το οποίο ισορροπεί με τη δράση του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Εκτρέπουμε κατακόρυφα προς τα πάνω το σώμα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε παρατηρούμε ότι εκτελεί ταλάντωση. Όπως και στην περίπτωση του οριζόντιου ελατηρίου, για να αποδείξουμε ότι η ταλάντωση του σώματος είναι απλή αρμονική, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε μια τυχαία θέση της κίνησης του η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:



α. Εξετάζουμε πρώτα το σώμα στη θέση ισορροπίας του.

Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ και το σώμα δέχεται δύο δυνάμεις, το **βάρος** του ($\vec{w}$) και τη ***δύναμη από το ελατήριο*** ($\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$).



Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k\Delta\ell = mg$ (1)

β. Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας.

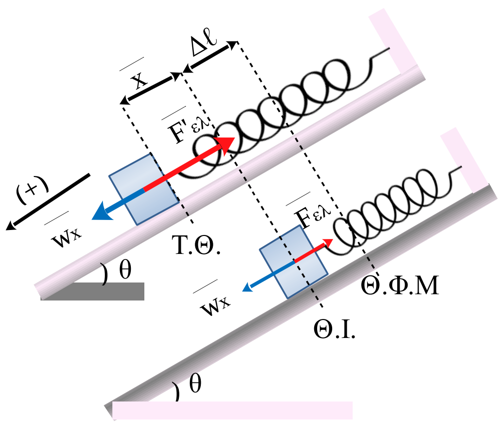
Ισχύει: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}$

Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της τυχαίας απομάκρυνσης, προκύπτει για την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης: $\Sigma F = -F'_{\varepsilon\lambda} + w = mg - k(\Delta\ell + x) \overset{(1)}{=} k\Delta\ell - k\Delta\ell - kx = -kx = -Dx$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής ΣF =-Dx, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς D = k.

Γ. Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο

Θεωρούμε σώμα μάζας m που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Εκτρέπουμε το σώμα από τη Θ.Ι. στη διεύθυνση του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί, οπότε παρατηρούμε ότι εκτελεί ταλάντωση. Όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, για να αποδείξουμε ότι η ταλάντωση του σώματος είναι απλή αρμονική, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε μια τυχαία θέση της κίνησής του η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Για το σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:



α. Εξετάζουμε πρώτα το σώμα στη θέση ισορροπίας του. Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ και το σώμα δέχεται το βάρος του ($\vec{w}$), τη δύναμη από το ελατήριο ($\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$) και την κάθετη αντίδραση του κεκλιμένου επιπέδου ($\vec{N}$). Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_x \Rightarrow k\Delta\ell = mg \cdot \eta\mu\varphi$ (1)

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας. Ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{F'}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}_x$

(**θωρώντας θετική φορά τη φορά της τυχαίας απομάκρυνσης**, προκύπτει για την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης: $\Sigma F = -F'_{\varepsilon\lambda} + w_x = mg \cdot \eta\mu\varphi - k(\Delta\ell + x) \overset{(1)}{=} k\Delta\ell - k\Delta\ell - kx = -kx = -Dx$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής ΣF = –Dx, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς D = k

☞ **Περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός συστήματος ελατήριο-σώμα.**

Όπως αποδείχθηκε, είτε έχουμε σύστημα ελατήριο - σώμα με οριζόντιο ελατήριο είτε με κατακόρυφο ελατήριο είτε με ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο, η σταθερά επαναφοράς του συστήματος ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου k. Συνεπώς η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad ή \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Παρατήρηση: Σε κάθε ταλάντωση ελατηρίου μάζας που δεν έχουμε κάποιες άλλες εξωτερικές δυνάμεις σταθερού ή μεταβαλλόμενου μέτρου ισχύει D = k (ανεξαρτήτου τοποθέτησης οριζόντιο κατακόρυφο κ.τ.λ.).