ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

Περιοδικά φαινόμενα, λέγονται τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Χαρακτηριστικά μεγέθη περιοδικών φαινομένων

☞ **Περίοδος**

Περίοδος (T) ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μία πλήρη επανάληψη του φαινομένου. **Μονάδα μέτρησης** της περιόδου στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το **1 s**.

☞ **Συχνότητα**

Συχνότητα (f) ονομάζεται το πηλίκο του αριθμού των επαναλήψεων του φαινομένου προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια. Δηλαδή $\boxed{f = \frac{N}{t}}$.

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το 1 Hz (1 Hz = 1 s^{-1} = 1 κύκλος/s).

Σχέση συχνότητας - περιόδου

Από τον ορισμό της συχνότητας και της περιόδου διαπιστώνουμε ότι τα μεγέθη αυτά είναι αντίστροφα.

(Σε χρόνο μιας περιόδου έχουμε μία επανάληψη). Δηλαδή $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ ή $\boxed{T = \frac{1}{f}}$

☞ **Γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα**

Η γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα (ω) δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων σε χρονική διάρκεια ίση με 2π s. Μονάδα γωνιακής συχνότητας στο σύστημα μονάδων S.I. είναι το **1 rad/s**.

Η σχέση της κυκλικής συχνότητας με την περίοδο και την συχνότητα είναι: $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ και $\boxed{\omega = 2\pi f}$

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ - ΑΠΛΗ (ΓΡΑΜΜΙΚΗ)ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

☞ Ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση;

Ταλάντωση ονομάζεται μια περιοδική παλινδρομική κίνηση που γίνεται συνεχώς πάνω στην ίδια τροχιά. Αν η τροχιά της ταλάντωσης είναι ευθεία γραμμή, τότε η ταλάντωση λέγεται **γραμμική.**

☞ Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές θέσεις μιας ταλάντωσης;

Θέση ισορροπίας: Είναι η θέση στην οποία η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με μηδέν.

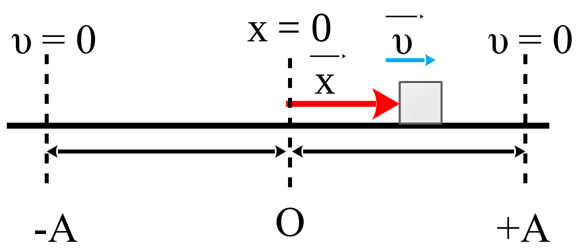
Ακραίες θέσεις: Στις θέσεις αυτές μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος και αντιστρέφεται η φορά της κίνησης του. Είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας και η απόσταση των θέσεων αυτών από τη θέση ισορροπίας ονομάζεται **πλάτος της ταλάντωσης**.

☞ Μεγέθη που χρειαζόμαστε για να μελετήσουμε την γραμμική ταλάντωση

Όπως και σε κάθε άλλη κίνηση έτσι και στην περίπτωση της ταλάντωσης η μελέτη της κίνησης που εκτελεί το σώμα γίνεται με τη βοήθεια του **διανύσματος θέσης** $\vec{x}$ (που ονομάζεται και **απομάκρυνση**), της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καθώς και της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$.

α. Διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ (ή απομάκρυνση):

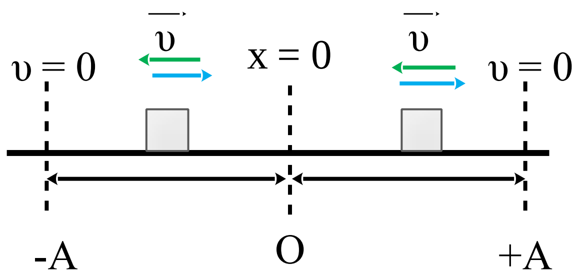
Είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και ως πέρας το σημείο όπου βρίσκεται το σώμα κάθε χρονική στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι η απομάκρυνση είναι ένα διάνυσμα που έχει πάντοτε φορά προς τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης (όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα).



Στη **θέση ισορροπίας** η απομάκρυνση ισούται με **μηδέν**. (x = 0).

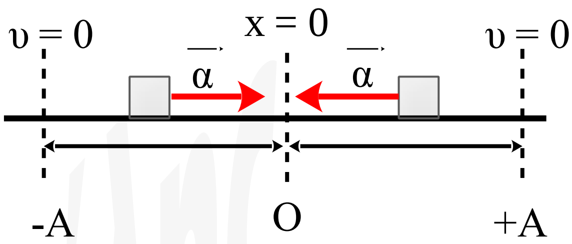
β. Ταχύτητα $\vec{\upsilon}$:

Το διάνυσμα της ταχύτητας έχει τη φορά της κίνησης του σώματος. Άρα όταν η κίνηση γίνεται με κατεύθυνση προς τη **θετική ακραία θέση** η ταχύτητα έχει **θετική** αλγεβρική **τιμή**, ενώ όταν η κίνηση γίνεται με κατεύθυνση την **αρνητική ακραία θέση** έχει **αρνητική** αλγεβρική **τιμή**. (Δεν έχει σημασία αν το σώμα βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα ή στον αρνητικό ημιάξονα).



γ. Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$:

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει πάντα φορά προς την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Όπως θα δούμε παρακάτω έχει τη φορά της συνισταμένης δύναμης.



☞ Πότε μια γραμμική ταλάντωση χαρακτηρίζεται ως απλή αρμονική;

Απλή αρμονική ονομάζεται η γραμμική ταλάντωση κατά την οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι αρμονική (τριγωνομετρική) συνάρτηση του χρόνου.

☞ Ποιες είναι οι χρονικές εξισώσεις x = f(t), υ = f(t) και α = f(t) για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στη διεύθυνση του άξονα x′Ox, μεταξύ των ακραίων θέσεων $x = -A$ και $x = +A$ και με θέση ισορροπίας το σημείο $O(x = 0)$.

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή **t = 0** το σώμα διέρχεται από τη **θέση ισορροπίας** του και η ταχύτητα του είναι **θετική** (δηλαδή έχει φορά προς τη μέγιστη θετική απομάκρυνση +A).

Όταν ικανοποιείται αυτή η περίπτωση όπως θα δούμε παρακάτω έχουμε ταλαντώσεις μηδενικής αρχικής φάσης,

Χρονική εξίσωση απομάκρυνσης

Η αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης του παραπάνω σώματος από τη θέση ισορροπίας του, κάθε χρονική στιγμή, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\boxed{x = A\eta\mu\omega t}$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης και ω η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

Χρονική εξίσωση ταχύτητας

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t}$$

όπου $\upsilon_{max} = \omega A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας (**πλάτος της ταχύτητας**).

Χρονική εξίσωση επιτάχυνσης

Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή από την εξίσωση:

$$\boxed{\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t}$$

όπου $\alpha_{max} = \omega^2 A$ η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης (**πλάτος της επιτάχυνσης**).

♦ Ποια σχέση συνδέει τις αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας και της απομάκρυνσης σε μια απλή αρμονική ταλάντωση;

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας μια τυχαία χρονική στιγμή και της απομάκρυνσης την ίδια χρονική στιγμή για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συνδέονται με τη σχέση:

$$\boxed{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Απόδειξη της σχέσης $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Έστω ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σώματος υπολογίζονται σε κάθε χρονική στιγμή από τις εξισώσεις:

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{x}{A} = \eta\mu\omega t \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \eta\mu^2\omega t \quad (1)$$

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{\upsilon}{\upsilon_{max}} = \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{max}}\right)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\omega t \quad (2)$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) έχω:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{max}}\right)^2 = 1 \text{ ή } \upsilon^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Η σχέση $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια άσκηση **μόνο εφόσον αποδειχθεί**.

☞ Η σχέση συνδέει τις αλγεβρικές τιμές της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης σε μια απλή αρμονική ταλάντωση

Οι αλγεβρικές τιμές της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης συνδέονται με τη σχέση:

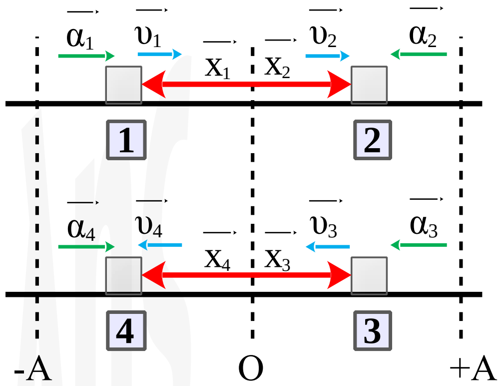
$$\boxed{\alpha = -\omega^2 x}$$

☞ Απόδειξη της σχέσης $\alpha = -\omega^2 x$.

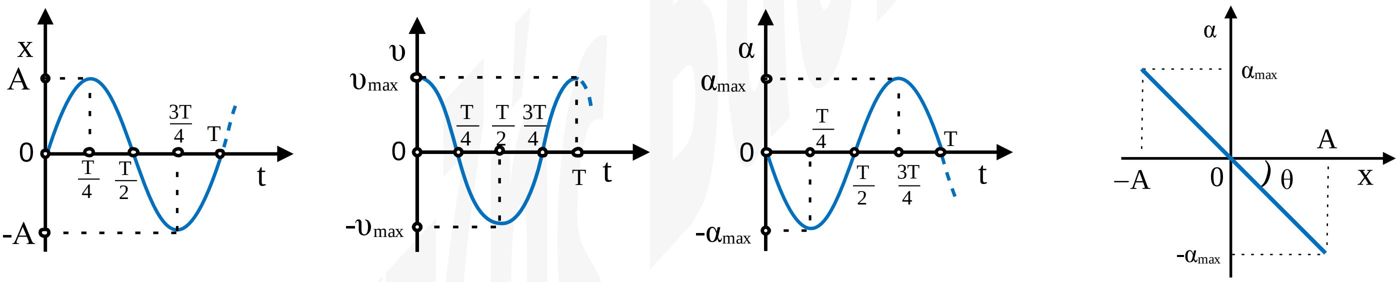
Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης είναι: $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t = -\omega^2 A\eta\mu\omega t = -\omega^2(A\eta\mu\omega t) \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x$.

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι στην απλή αρμονική ταλάντωση **η επιτάχυνση έχει πάντοτε αντίθετο πρόσημο από την απομάκρυνση**. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει πάντοτε αντίθετη φορά από το διάνυσμα της απομάκρυνσης. Επειδή η απομάκρυνση έχει πάντοτε φορά προς τις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, **η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς τη θέση ισορροπίας.**

Στο σχήμα φαίνονται τέσσερις θέσεις του σώματος (1, 2, 3, 4) καθώς εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Είναι φανερό πως όταν το σώμα βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα (θέσεις 2,3), η επιτάχυνση έχει φορά προς τ' αριστερά (προς τη Θ.Ι.), ανεξάρτητα από τη φορά της ταχύτητας του, ενώ όταν το σώμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα (θέσεις 1,4), η επιτάχυνση έχει φορά προς τα δεξιά (προς τη Θ.Ι.), ανεξάρτητα και πάλι από τη φορά της ταχύτητας του.

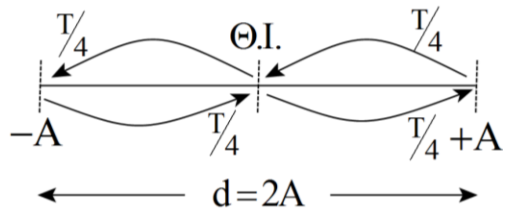


♦ Ποιες οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων x = f(t), υ = f(t) και α = f(t), α = f(x) στην απλή αρμονική ταλάντωση.



Χρονικά διαστήματα σε διάφορες φάσεις της ταλάντωσης.

Η **απόσταση** μεταξύ των δύο **ακραίων** θέσεων είναι **d = 2A** και για τις **μεταβάσεις από την θέση ισορροπίας στις ακραίες θέσεις** και αντίστροφα χρειάζεται χρόνος $\mathbf{\Delta t = \frac{T}{4}}$ όπου T η περίοδος της ταλάντωσης



Για **μετάβαση από τη μία ακραία θέση στην άλλη** ή από τη **θέση ισορροπίας έως την επιστροφή σ' αυτή** απαιτείται χρόνος $\mathbf{\Delta t = \frac{T}{2}}$.

Δηλαδή σε χρόνο $\mathbf{\frac{T}{4}}$ το σώμα **διανύει απόσταση** ίση με **A**.

Προσοχή!!! αυτό **δεν είναι γενικό συμπέρασμα**, δηλαδή σε κάθε χρονικό διάστημα ίσο με $\frac{T}{4}$ να διανύει το ταλαντούμενο σώμα απόσταση A γατί η απλή αρμονική ταλάντωση **δεν είναι κίνηση ευθύγραμμη ομαλή**.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Σε μία περίοδο **η μετατόπιση ενός ταλαντούμενου σώματος είναι $\Delta x = 0$**, αφού το σώμα επιστρέφει στην αρχική του θέση, το δε **διάστημα που διανύει είναι $S = 4A$.**

Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει τις φάσεις μιας ταλάντωσης σε μία περίοδο. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι ίδια είτε χρησιμοποιήσουμε ως σημείο εκκίνησης τη θέση ισορροπίας είτε κάποια από τις ακραίες θέσεις.

Η (ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ) ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Κάθε σώμα μάζας m που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχει επιτάχυνση και κατά συνέπεια δέχεται συνισταμένη δύναμη κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του. Σύμφωνα με το 2^{o} νόμο του Newton, ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow \Sigma F = m(-\omega^2 x) \Rightarrow \Sigma F = -m\omega^2 x$$

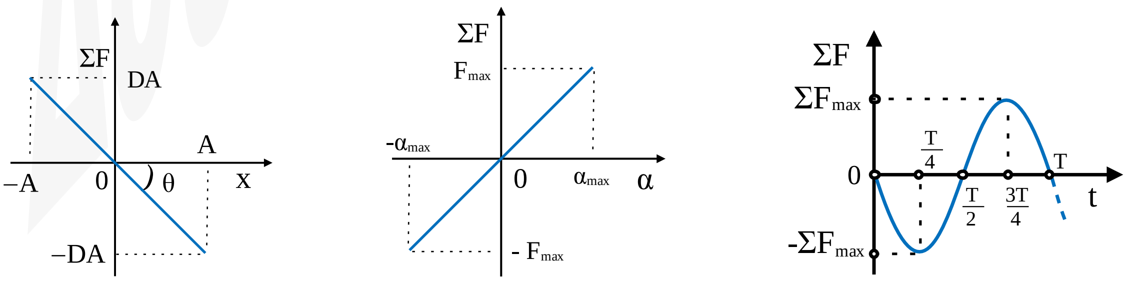
Αν συμβολίσουμε με D το γινόμενο $m\omega^2$, η παραπάνω σχέση γράφεται: $\boxed{\Sigma F = -Dx}$

Η σταθερά αναλογίας $D = m\omega^2$ λέγεται **σταθερά επαναφοράς ή σταθερά της ταλάντωσης** και η τιμή της εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος που ταλαντώνεται. Από τη σχέση ΣF = –Dx προκύπτει ότι: Όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του και έχει πάντοτε αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Αυτό σημαίνει ότι **η συνισταμένη δύναμη, όπως και η επιτάχυνση, έχει φορά πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας**. Για το λόγο αυτό η συνισταμένη δύναμη λέγεται και **δύναμη επαναφοράς,** αφού δρα έτσι, ώστε να επιταχύνει το σώμα πάντα προς τη θέση ισορροπίας του.

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα μεγιστοποιείται (κατά μέτρο) κάθε φορά που το σώμα φτάνει σε ακραία θέση. Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο $\boxed{\Sigma F_{max} = DA = m\alpha_{max}}$.

Παρατήρηση: Η σχέση ΣF = –Dx αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτό σημαίνει πως αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η γραμμική ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα είναι και αρμονική, μπορούμε απλώς να αποδείξουμε ότι σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. ικανοποιεί τη σχέση ΣF = –Dx.

☞ **Γραφικές παραστάσεις των σχέσεων: ΣF = –Dx, ΣF = mα, ΣF = –Dημωt.**



☞ **Σχέση γωνιακής συχνότητας και περιόδου μιας Α.Α.Τ. με τη σταθερά επαναφοράς.**

Από τη σχέση $D = m\omega^2$ προκύπτει: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}}$

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΙ Α.Α.Τ.

Η ενέργεια της ταλάντωσης Ε ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισούται με την ενέργεια που **προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση**. Η ενέργεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}DA^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι **το πλάτος Α καθορίζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης** (όπως και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης υ_{max}), δηλαδή από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται. Σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια αυτή παραμένει σταθερή. Άρα:

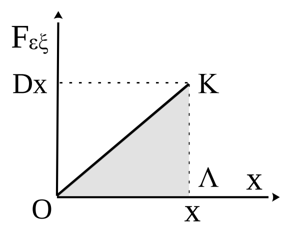
Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης.

Στη διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται ως δυναμική ενέργεια ταλάντωσης και ως κινητική ενέργεια. Η κινητική και η δυναμική ενέργεια υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad \text{και} \qquad U = \frac{1}{2}Dx^2$$

☞ **Απόδειξη της σχέσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$**

Αν το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση ισορροπίας Ο (x = 0), για να μετακινηθεί σε μια άλλη θέση, πρέπει να του ασκηθεί εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$. Κατά τη μετακίνηση αυτή θα ασκείται στο σώμα και η δύναμη επαναφοράς. Για να μετακινηθεί το σώμα σε θέση x χωρίς ταχύτητα, πρέπει το μέτρο της εξωτερικής δύναμης να μεταβάλλεται έτσι, ώστε η δύναμη αυτή να είναι συνεχώς αντίθετη με τη δύναμη επαναφοράς. Δηλαδή πρέπει να ισχύει: $F_{\varepsilon\xi} = -F_{\varepsilon\pi} = Dx$



Συνεπώς η δύναμη $F_{\varepsilon\pi}$ είναι μεταβλητού μέτρου, οπότε το έργο της υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση της εξίσωσης $F_{\varepsilon\xi} = f(x)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ ισούται με το έργο της δύναμης $F_{\varepsilon\xi}$. Επομένως:

$$W_{F_{\varepsilon\varphi}} = E\mu\beta_{(\tau\rho\iota\gamma)} = \frac{1}{2}Dx\cdot x \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\varphi}} = \frac{1}{2}Dx^2$$

Το έργο της εξωτερικής δύναμης εκφράζει την ενέργεια που προσφέραμε στο σύστημα και η οποία αποθηκεύτηκε ως δυναμική ενέργεια (αφού το σώμα μετακινήθηκε χωρίς ταχύτητα). Αν δεχτούμε ότι το σώμα δεν έχει δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, τότε στη θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. η δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από τον τύπο $U = \frac{1}{2}Dx^2$.

☞ Η αρχή διατήρησης της ενέργειας στην απλή αρμονική ταλάντωση

Η ολική ενέργεια ταλάντωσης Ε ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση παραμένει σταθερή και είναι κάθε στιγμή ίση με το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης και της κινητικής του ενέργειας. Δηλαδή: $\mathbf{E = K + U}$

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A\eta\mu\omega t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2\omega t$$

και $E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \eta\mu^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

α. Στη θέση ισορροπίας (x = 0) η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης. Δηλαδή $\mathbf{E = K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2}$.

β. Στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης (x = ±A) η κινητική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.

Δηλαδή $\mathbf{E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2}$.

γ. Σε οποιαδήποτε ενδιάμεση θέση (εκτός από τη Θ.Ι.) το σύστημα έχει και κινητική και δυναμική ενέργεια. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας με την εξής μορφή:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2A^2 = \upsilon^2 + \omega^2x^2}$$

αλλά μπορούμε να συνδέσουμε και δύο θέσεις της ταλάντωσης ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} E = K_1 + U_1 \\ E = K_2 + U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_2^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1^2 + \omega^2x_1^2 = \upsilon_2^2 + \omega^2x_2^2}$$

☞ Χρονικές εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας στην Α.Α.Τ. και οι αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις

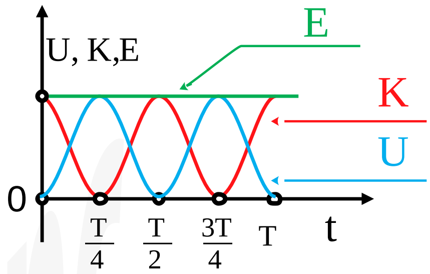
θεωρούμε ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του (x = 0) με θετική ταχύτητα (υ > 0).

Στην περίπτωση αυτή ισχύει: $x = A\eta\mu\omega t$ και $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$.

Επομένως έχουμε (το δείξαμε πιο πάνω):

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m(\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t=E\sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

$$U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}m\omega^2(A\eta\mu\omega t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2\omega t=E\eta\mu^2\omega t$$



Παρατήρηση: Το σχήμα που φαίνεται δίπλα προκύπτει από τους τύπους αποτετραγωνισμού του ημιτόνου και του συνημιτόνου (τους οποίους δεν έχετε διδαχθεί), $\eta\mu^2\omega t=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\omega t}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega t=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\omega t}{2}$ οπότε σύμφωνα με αυτές τις σχέσεις έχουμε:

$$K=E\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\omega t}{2}=\frac{E}{2}+\frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu2\omega t$$

$$U=E\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\omega t}{2}=\frac{E}{2}-\frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu2\omega t$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια εκτελούν ταλάντωση μεταξύ των θέσεων μηδέν και Ε. Δηλαδή συνιμητονοειδής συναρτήσεις που έχουν άξονα συμμετρίας το Ε/2.

Επομένως **η δυναμική και η κινητική ενέργεια** είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, με γωνιακή συχνότητα (ω') **διπλάσια** από τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης (ω).

Προφανώς ισχύει και **T′ = T/2 και f ′ = 2f**.

☞ Οι εξισώσεις K = f(x) και U = f(x) στην Α.Α.Τ. και οι αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $U=\frac{1}{2}Dx^2$ με $-A\le x\le +A$

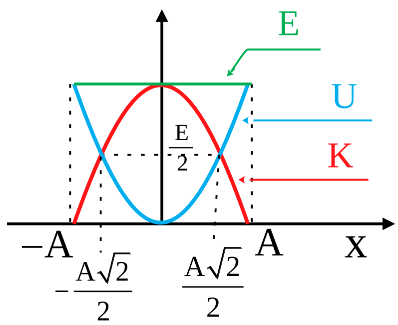
Η σχέση αυτή είναι της μορφής y = αx² με $\alpha=\frac{1}{2}D>0$. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα πάνω.

Η κινητική ενέργεια δεν έχει άμεση εξάρτηση από την απομάκρυνση οπότε από την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση προκύπτει: $E=K+U\Rightarrow K=E-U\Rightarrow K=E-\frac{1}{2}Dx^2$

Η σχέση αυτή είναι της μορφής $y=\alpha-\beta x^2$ με $\beta=\frac{1}{2}D$

Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα κάτω.

Οι γραφικές παραστάσεις U = f(x), K = f(x) και E = f(x) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



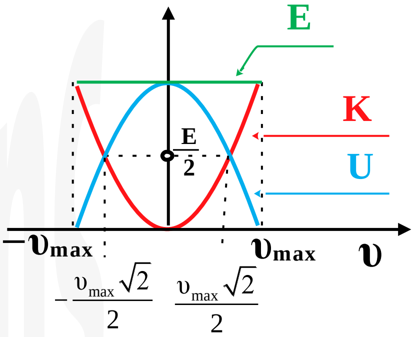
Παρατήρηση: Η κινητική ενέργεια γίνεται **ίση** με τη δυναμική ενέργεια (K = U) κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από τις **θέσεις** $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ (με απόδειξη). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Εφαρμόζουμε την ΑΑ.Ε. για την ταλάντωση: $E=K+U\Rightarrow E=2U\Rightarrow\frac{1}{2}DA^2=2\frac{1}{2}Dx^2\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$

☞ Οι εξισώσεις K = f(υ) και U = f(υ) στην Α.Α.Τ. και οι αντίστοιχες γραφικές τους παραστάσεις.

Η κινητική ενέργεια του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{με} \quad -\upsilon_{max} \leq \upsilon \leq +\upsilon_{max}$$



Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει:

$$U = E - K = E - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{με} \quad -\upsilon_{max} \leq \upsilon \leq +\upsilon_{max}$$

Οι γραφικές παραστάσεις της κινητικής, της δυναμικής και της ολικής ενέργειας σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Παρατήρηση: Η κινητική ενέργεια γίνεται **ίση** με τη δυναμική ενέργεια (K = U) κάθε φορά που η ταχύτητα του σώματος αποκτά τις τιμές $\boldsymbol{\upsilon = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_{max}}$ (με απόδειξη). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Εφαρμόζουμε την ΑΑ.Ε. για την ταλάντωση: $E = K + U \Rightarrow E = 2K \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = 2\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_{max}$

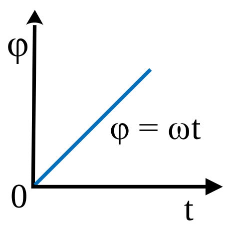
☞ Απόδειξη της σχέσης $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ με τη βοήθεια της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = \upsilon^2 + \omega^2x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

☞ Φάση της ταλάντωσης

Φάση ονομάζουμε την ταλάντωση την ποσότητα που υπάρχει στην εξίσωση της απομάκρυνσης με την προϋπόθεση ότι είναι της μορφής x = Αημωt τότε η φάση είναι φ = ωt.



Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι η φάση είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και η γραφική παράσταση της είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από το σχήμα προκύπτει ότι από την κλίση της γραφικής παράστασης μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλική συχνότητα αφού $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.