ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΠΛΗΣΙΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ (ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ)

1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις (1) και (2) που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν μηδενική αρχική φάση, ίσα πλάτη A = 0,1 m και γωνιακές συχνότητες ω_1 = 98π rad/s και ω_2 = 102π rad/s αντίστοιχα. Η συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα εμφανίζει διακροτήματα.

α. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις των συνιστωσών ταλαντώσεων και την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα και τη χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης.

γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων σε χρόνο ίσο με μία περίοδο του διακροτήματος.

Λύση

α. Οι δύο συνιστώσες απλές αρμονικές ταλαντώσεις έχουν μηδενική αρχική φάση και ίσα πλάτη. Συνεπώς οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων έχουν τη μορφή:

$x_1 = A_1 ημω_1 t \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0{,}1ημ98πt}$ **(S.I.)** και $x_2 = A_2 ημω_2 t \Rightarrow \mathbf{x_2 = 0{,}1ημ102πt}$ **(S.I.)**

Επειδή οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες, η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι της μορφής:

$$x = 2Aσυν\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)ημ\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}2συν(2πt)ημ(100πt)\ \ (S.I.)}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με ω = 100π rad/s

Επομένως η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{1}{50}\,s}$

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι η περίοδος του διακροτήματος.

Έχουμε: $\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow \mathbf{f_1 = 49\,Hz}$ και $\omega_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow \mathbf{f_2 = 51\,Hz}$ οπότε $T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow \mathbf{T_\delta = \frac{1}{2}\,s}$

γ. Ο αριθμός των ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη συχνότητα της ταλάντωσης αν θέσουμε $\Delta t = T_\delta$

$$f=\frac{N}{\Delta t}\Rightarrow\frac{1}{T}=\frac{N}{T_\delta}\Rightarrow N=\frac{T_\delta}{T}\Rightarrow N=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{50}}\Rightarrow \mathbf{N=25\,\tau\alpha\lambda.}$$

Δουκατζής Βασίλης

2. Μικρό σώμα εκτελεί σύνθετη ταλάντωση η οποία εμφανίζει διακροτήματα. Η κίνηση αυτή προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και οι οποίες περιγράφονται από τις χρονικές εξισώσεις $x_1 = 0{,}2ημ198πt$ (S.I.) και $x_2 = 0{,}2ημ202πt$ (S.I.).

α. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης και να υπολογίσετε τη συχνότητα της.

β. Να βρείτε πόσες φορές σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

γ. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

Λύση

α. Επειδή οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες, η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι της μορφής:

$$x = 2Aσυν\left(\frac{ω_2 - ω_1}{2}t\right)ημ\left(\frac{ω_2 + ω_1}{2}t\right) \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}4συν(2πt)ημ(200πt)\ \ (S.I.)}$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι ίση με ω = 200π rad/s

Επομένως η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με: $T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}01\,s}$

Η περίοδος του διακροτήματος υπολογίζεται ως εξής.

Έχουμε: $ω_1 = 2πf_1 \Rightarrow \mathbf{f_1 = 99\,Hz}$ και $ω_2 = 2πf_2 \Rightarrow \mathbf{f_2 = 101\,Hz}$ οπότε $T_δ = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow \mathbf{T_δ = \frac{1}{2}s}$

Το σώμα διέρχεται δύο φορές από τη θέση ισορροπίας του (x = 0) στη χρονική διάρκεια μίας ταλάντωσης. Επομένως, για να απαντήσουμε στο ερώτημα, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος.

Ο αριθμός των ταλαντώσεων υπολογίζεται από τη συχνότητα της ταλάντωσης αν θέσουμε $Δt = T_δ$

$$f = \frac{N}{Δt} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{N}{T_δ} \Rightarrow N = \frac{T_δ}{T} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{2}}{0{,}01} \Rightarrow \mathbf{N = 50\ ταλ.}$$

Αφού το σώμα στη χρονική διάρκεια μίας περιόδου του διακροτήματος εκτελεί 50 ταλαντώσεις, στην ίδια χρονική διάρκεια διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 100 φορές.

γ. Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση: $|A| = 0{,}02|\sigma\upsilon\nu 2\pi t|$ (S.I.)

$$|A| = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\pi t = 0 \Rightarrow 2\pi t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{t = \frac{2k+1}{4} s}$$

Συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0 τη χρονική στιγμή **t = 0,25 s**.

Δουκατζής Βασίλης

3. Μικρό σώμα εκτελεί συνισταμένη ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = a \cdot συν8πt \cdot ημωt$ (t σε s), όπου a θετική ποσότητα. Η ταλάντωση αυτή προκύπτει από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες, οι οποίες εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν εξισώσεις απομάκρυνσης $x_1 = Aημ508πt$ (t σε s) και $x_2 = Aημω_2t$ με $ω_1 > ω_2$. Η μεγαλύτερη τιμή του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται, με 0,6 m.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος A των συνιστωσών ταλαντώσεων,

β. Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω της συνισταμένης ταλάντωσης.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $π^2 = 10$.

Λύση

α. Επειδή οι δύο συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν παραπλήσιες συχνότητες και οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x_1 = Aημω_1t$ και $x_2 = Aημω_2t$ συμπεραίνουμε πως η συνισταμένη ταλάντωση έχει χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής: $x = 2Aσυν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right)$

Συγκρίνοντας την δοθείσα με την θεωρητική μορφή προκύπτει: $a = 2A \Rightarrow 0{,}6 = 2A \Rightarrow A = 0{,}3$ m

και $\frac{ω_1 - ω_2}{2} = 8π \Rightarrow ω_1 - ω_2 = 16π \Rightarrow 508π - ω_2 = 16π \Rightarrow \mathbf{ω_2 = 492π\frac{rad}{s}}$

β. Η κυκλική συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $ω = \frac{ω_1 + ω_2}{2} = \frac{508π + 492π}{2} \Rightarrow \mathbf{ω = 500π\frac{rad}{s}}$