ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και ίδιας συχνότητας, οι οποίες εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας για τη συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα στις περιπτώσεις όπου οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης για τις δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις είναι οι:

α. $x_1 = 0{,}2ημ5t$ (S.I.) και $x_2 = 0{,}6ημ5t$ (S.I.)

β. $x_1 = 0{,}2ημ8t$ (S.I.) και $x_2 = 0{,}8ημ(8t + π)$ (S.I.)

Λύση

α. Οι ταλαντώσεις έχουν την ίδια συχνότητα και η διαφορά φάσης τους είναι ίση με μηδέν κάθε χρονική στιγμή (συμφασικές ταλαντώσεις). Επομένως το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με το άθροισμα των πλατών των συνιστωσών ταλαντώσεων. Δηλαδή: $A=A_1 + A_2 \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}8\ m}$

Αφού οι δύο συνιστώσες ταλαντώσεις είναι συμφασικές, η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με τη φάση των συνιστωσών ταλαντώσεων. Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι η: $\mathbf{x = 0{,}8ημ5t}$ (S.I.)

Μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας ως εξής.

$x = x_1 + x_2 = 0{,}2ημ5t + 0{,}6ημ5t \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}8ημ5t}$ **(S.I.)**

Παρατήρηση: Οι συμφασικές ταλαντώσεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν μηδενική αρχική φάση. Για παράδειγμα, οι συνιστώσες ταλαντώσεις $x_1 = 0{,}1ημ(10t + π/6)$ (S.I.) και $x_2 = 0{,}3ημ(10t + π/6)$ (S.I.) είναι συμφασικές και έχουν αρχική φάση π/6 rad. Και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα των πλατών των συνιστωσών ταλαντώσεων ισούται με το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με τη φάση των συνιστωσών ταλαντώσεων. Δηλαδή η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή είναι η $x = 0{,}4ημ(10t + π/6)$ (S.I.).

β. Οι δύο συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν ίδια συχνότητα και διαφορά φάσης που είναι ίση με:

$φ = φ_2 – φ_1 \Rightarrow φ = (8t + π) – 8t \Rightarrow \mathbf{φ = π\ rad}$

Επομένως το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των πλατών των συνιστωσών ταλαντώσεων. Δηλαδή: $A = |A_1 - A_2| \Rightarrow A = 0{,}6m$

Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος (δηλαδή της x_2). Επομένως η εξίσωση της απομάκρυνσης για τη συνισταμένη ταλάντωση είναι η:

$\mathbf{x = 0{,}6ημ(5t + π)}$ **(S.I.)**

Με την αρχή της επαλληλίας έχουμε: $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 0{,}2ημ8t + 0{,}8ημ(8t + π) \Rightarrow x = 0{,}2ημ8t - 0{,}8ημ8t$

$\Rightarrow x = -0{,}6ημ8t \Rightarrow x = 0{,}6ημ(8t + π)$ (S.I.)

2. Οι δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εκτελεί ταυτόχρονα ένα μικρό σώμα εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης τους είναι οι $x_1 = 0{,}3\sqrt{3}\,ημ5t$ (S.I.) και $x_2 = 0{,}3ημ(5t + π/2)$ (S.I.).

α. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα την χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}1π$ s

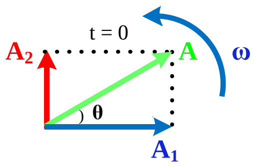
γ. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή γίνονται αντίθετες οι δύο επιμέρους απομακρύνσεις για πρώτη φορά.

Λύση

α. Η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι ίση με:

$φ = φ_2 - φ_1 \Rightarrow φ = π/2$ rad

Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}6\,m}$$

και $$εφθ = \frac{A_2}{A_1} = \frac{0{,}3}{0{,}3\sqrt{3}} \Rightarrow εφθ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathbf{θ = \frac{π}{6}\,rad}$$

Σημείωση: Η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης πρέπει να βρίσκεται πάντα ανάμεσα στις δύο αρχικές φάσεις των ταλαντώσεων από τις οποίες με την σύνθεση τους προκύπτει η συνισταμένη ταλάντωση.

Η εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης έχει τη μορφή: $\mathbf{x = 0{,}6ημ(5t + \frac{π}{6})}$ **(S.I.)**

β. Η εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει από τη συνισταμένη κίνηση και είναι:

$υ_{max} = ωA \Rightarrow \mathbf{υ_{max} = 3\ m/s}$ οπότε έχουμε $υ = υ_{max}συν(ωt + φ_0) \Rightarrow \mathbf{υ = 3συν(5t + \frac{π}{6})}$ **(S.I.)**

Άρα τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε: $υ_1 = 3συν(5 \cdot 0{,}1π + \frac{π}{6}) \Rightarrow υ_1 = 3συν(\frac{2π}{3}) \Rightarrow \mathbf{υ_1 = 1{,}5\frac{m}{s}}$

γ. Οι απομακρύνσεις είναι αντίθετες άρα:

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow 0{,}3\sqrt{3}ημ5t = -0{,}3ημ(5t + \frac{π}{2}) \Rightarrow \sqrt{3}ημ5t = -συν5t \Rightarrow εφ5t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 5t = kπ - \frac{π}{6} \Rightarrow t = \frac{6kπ - π}{30}$$

Άρα για πρώτη φορά $t = \frac{5π}{30}s \Rightarrow \mathbf{t = \frac{π}{6}s}$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αφού $x_1 = -x_2$ τότε $x = x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow 0,6ημ(5t + \frac{π}{6}) = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow \mathbf{t = \frac{π}{6} s}$

3. Σημειακό αντικείμενο μάζας m = 2 kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ που έχουν ίσες συχνότητες f = 5/π Hz και εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι οι $x_1 = 0{,}5\eta\mu\omega t$ (S.I.) και $x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \pi/3)$. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημειακό αντικείμενο διέρχεται από τη θέση x = $0{,}25\sqrt{3}$ m.

α. Να υπολογίσετε το πλάτος της συνιστώσας ταλάντωσης A_2.

β. Να βρείτε την ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σημειακού αντικειμένου.

δ. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων ώστε να ισχύει η σχέση $E = E_1 + E_2$. Δίνεται $0 \le \varphi \le \pi$ rad.

Λύση

α. Κάθε χρονική στιγμή ισχύει: $x = x_1 + x_2$ (1)

Τη χρονική στιγμή t = 0 είναι: $x_1 = 0{,}4\eta\mu(\omega\cdot 0) \Rightarrow x_1 = 0$ και $x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega\cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_2$

Από την (1) έχουμε $x = x_1 + x_2 \Rightarrow 0{,}25\sqrt{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}A_2 \Rightarrow A_2 = 0{,}5\,\text{m}$

β. Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A = \sqrt{0{,}25 + 0{,}25 + 2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}5\sqrt{3}\,m}$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10}$ **rad/s**.

και η σταθερά επαναφοράς είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D = 200\frac{N}{m}}$

Η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}25\cdot 3 \Rightarrow \mathbf{E = 75\,J}$$

γ. Για να βρούμε την εξίσωση της κίνησης χρειαζόμαστε την αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης

$$εφθ = \frac{A_2 ημ\frac{π}{3}}{A_1 + A_2 συν\frac{π}{3}} = \frac{0,25\sqrt{3}}{0,5+0,25} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathbf{θ = \frac{π}{6} rad}$$

Άρα $x = Aημ(ωt+θ) \Rightarrow \mathbf{x = 0,5\sqrt{3}ημ(10t+\frac{π}{6})\ (S.I.)}$

Η εξίσωση της ταχύτητας της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$υ = υ_{max} συν(ωt+θ) \Rightarrow \mathbf{υ = 5\sqrt{3}συν(10t+\frac{π}{6})\ (S.I.)}$$

Η χρονική εξίσωση της κινητική ενέργειας είναι:

$$K = \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}2(5\sqrt{3}συν(10t+\frac{π}{6}))^2 \Rightarrow \mathbf{K = 75συν^2(10t+\frac{π}{6})\ (S.I.)}$$

δ. Από την εκφώνηση έχουμε: $E = E_1 + E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow$

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ = A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow 2A_1A_2συνφ = 0 \Rightarrow συνφ = 0 \Rightarrow \mathbf{φ = \frac{π}{2} rad}$$

4. Υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ που έχουν ίσες συχνότητες και εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η ενέργεια Ε της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης E_1 και E_2 που θα είχε αν εκτελούσε την κάθε συνιστώσα ταλάντωση ξεχωριστά. Η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της συνισταμένης ταλάντωσης ισούται με 0,8 m και το υλικό σημείο χρειάζεται χρόνο 0,1π s για να τη διανύσει,

α. Να υπολογίσετε το πλάτος των συνιστωσών ταλαντώσεων.

β. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων γνωρίζοντας ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι μεταξύ του 0 και του π rad.

γ. Αν η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της συνιστώσας ταλάντωσης $x_1 = f(t)$ είναι η $x_1 = A_1ημωt$, να γράψετε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του για τη συνισταμένη κίνηση που εκτελεί.

Λύση

α. Η απόσταση των δύο άκρων είναι ίση με $d = 2A \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}4\ m}$

ο δε χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί η παραπάνω απόσταση είναι ίση με το μισό της περιόδου άρα:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow 0{,}1\pi = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\pi\,s} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}.$$

β. Η ενέργεια Ε της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης που θα είχε αν εκτελούσε την κάθε συνιστώσα ταλάντωση ξεχωριστά. Δηλαδή:

$$E = E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A = A_1 = A_2$$

από την εξίσωση του πλάτους έχουμε: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ} \Rightarrow A^2 = A^2 + A^2 + 2AAσυνφ \Rightarrow$

$$-A^2 = 2A^2συνφ \Rightarrow συνφ = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \frac{2\pi}{3}\,rad}$$

γ. Αφού η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μιας συνιστώσας ταλάντωσης είναι x_1 = Αημωt, η άλλη ταλάντωση θα είναι: $x_2 = Αημ(ωt + \frac{2π}{3})$ και η συνισταμένη ταλάντωση έχει χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής: $x = Αημ(ωt + θ)$

$$A = A_1 = A_2 = 0{,}4\ m \quad και \quad εφθ = \frac{Αημ\frac{2π}{3}}{A + Aσυν\frac{2π}{3}} = \frac{0{,}5\sqrt{3}}{1 - 0{,}5} = \sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{θ = \frac{π}{3} rad}$$

Άρα η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι η: $\mathbf{x = 0{,}4ημ(10t + \frac{π}{3})\ (S.I.)}$

5. Μικρό σώμα μάζας m = 2 kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίσα πλάτη που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι οι $x_1 = A_1 ημ(10t + \frac{π}{6})$ και $x_2 = A_2 ημ(10t + \frac{2π}{3})$ (στο S.I. και οι δύο), με $A_1 = A_2$. Η συνισταμένη δύναμη της ταλάντωσης έχει μέγιστη τιμή $F_{max} = 40\sqrt{2}$ N

α. Να υπολογίσετε τα πλάτη των συνιστωσών ταλαντώσεων A_1 και A_2.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς.

Λύση

α. Η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων είναι: $φ = φ_2 – φ_1 = π/2$ rad

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι $D = mω^2 \Rightarrow \mathbf{D = 200\ N/m}$

Η μέγιστη δύναμη είναι: $F_{max} = DA \Rightarrow A = \frac{F_{max}}{D} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\sqrt{2}\,m}$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Rightarrow A^2 = 2A_1^2 \Rightarrow A_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{A_1 = 0,2\,m}$

και τελικά $A_1 = A_2 = 0,2$ m

β. Θα βρούμε πρώτα τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης. Η διαφορά φάσης θ της συνιστώσας ταλάντωσης $x_1 = f(t)$ και της συνισταμένης ταλάντωσης $x = f(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση: $εφθ = \frac{A_2}{A_1} = 1 \Rightarrow \mathbf{θ = \frac{π}{4}\,rad}$

Η συνισταμένη ταλάντωση έχει φάση που διαφέρει κατά θ από τη φάση της συνιστώσας ταλάντωσης x_1.

Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι η: $φ = ωt + φ_{01} + θ \Rightarrow φ = 10t + \frac{π}{6} + \frac{π}{4} \Rightarrow \mathbf{φ = 10t + \frac{5π}{12}\ (S.I.)}$

Άρα: $x = 0,2\sqrt{2}ημ(10t + \frac{5π}{12})$

Η χρονοεξίσωση της δύναμης είναι: $ΣF = –Dx \Rightarrow \mathbf{ΣF = –200 \cdot 0,2\sqrt{2}ημ(10t + \frac{5π}{6})\ (S.I.)}$