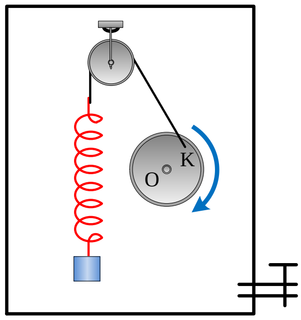
1. Ένα σώμα μάζας m = 0,2 kg εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μικρής απόσβεσης, με τη βοήθεια της διάταξης που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η σταθερά του ελατηρίου είναι ίση με k = 45 N/m και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι η x = 0,3ημ10t (S.I.).



α. Να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής του τροχού.

β. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας καθώς και την εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{K_{max}}{U_{max}}$ της μέγιστης κινητικής ενέργειας του σώματος προς τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

δ. Με ποια μάζα πρέπει να αντικαταστήσουμε την υπάρχουσα ώστε να πετύχουμε μέγιστη μεταφορά ενέργειας από τον τροχό στο σώμα.

Λύση

α. Καθώς περιστρέφεται ο τροχός (διεγέρτης) στο σύστημα μάζα - ελατήριο ασκείται διεγείρουσα αρμονική δύναμη ίδιας συχνότητας με τη συχνότητα περιστροφής του τροχού. Η εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί το σύστημα μάζα - ελατήριο έχει συχνότητα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, άρα και περίοδο ίση με την περίοδο του διεγέρτη. Επομένως το σώμα ταλαντώνεται με περίοδο ίση με την περίοδο περιστροφής του τροχού. Από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε: **ω = 10 rad/s**

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{5}\,s}$ (που είναι και η περίοδος περιστροφής του τροχού)

β. Επειδή η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής $x = A\eta\mu\omega t$ προκύπτει ότι

A = 0,3 m και ω = 10 rad/s.

Οι μέγιστες τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι αντίστοιχα:

$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 3\ m/s}$ και $\alpha = \omega^2 A \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 30\ m/s^2}$.

Με αντικατάσταση προκύπτει: **υ = 3συν10t (S.I.)** και **α = –30ημ10t (S.I.)**

γ. Ο ζητούμενος λόγος είναι $\frac{K_{max}}{U_{max}}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2}{\frac{1}{2}kA^2}=\frac{0,2\cdot 9}{45\cdot 0,09}\Rightarrow\frac{K_{max}}{U_{max}}=\frac{5}{9}$

Σημείωση: Βλέπουμε ότι ο παραπάνω λόγος δεν είναι ίσος με 1 και αυτό γιατί στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η μέγιστη κινητική ενέργεια δεν ισούται με την μέγιστη δυναμική ενέργεια. Κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνο στο συντονισμό.

δ. Για να πετύχουμε μέγιστη μεταφορά ενέργειας από τον διεγέρτη στο σύστημα θα πρέπει να έχουμε συντονισμό. Άρα $\omega_0'=\omega\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m'}}=\omega\Rightarrow m'=\frac{k}{\omega^2}\Rightarrow m'=\frac{45}{100}\Rightarrow\mathbf{m'=0,45\,kg}$

2. Ένας ταλαντωτής μάζας m = 2 kg εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση κατά μήκος του άξονα x'x και δέχεται κατά μήκος του άξονα αυτού τις εξής συγγραμμικές δυνάμεις:

δύναμη επαναφοράς της μορφής $F_{επ} = -200x$ (S.I.), δύναμη αντίστασης στην κίνηση της μορφής $F_{αντ} = -4υ$ (S.I.) όπου υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του, και μία περιοδική διεγείρουσα δύναμη της μορφής $F_δ = 20συν16t$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή.

β. Να βρείτε τη χρονική διάρκεια κίνησης του ταλαντωτή μεταξύ των δύο άκρων της ταλάντωσης του.

γ. Μεταβάλλουμε τη συχνότητα της δύναμης $F_δ$, έτσι ώστε να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, οπότε αυτός αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0{,}5ημω_0t$ (S.I.).

Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη $F_δ$ προσφέρει ενέργεια στον ταλαντωτή ισούται με το ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης $F_{αντ}$.

δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό προσφοράς ενέργειας όταν το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{π}{40}s$.

Λύση

α. Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος και υπολογίζεται από τη σχέση: $f_0 = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{200}{2}} \Rightarrow \mathbf{f_0 = \frac{5}{π}Hz}$

β. Ο χρόνος για την μετάβαση από το ένα άκρο της ταλάντωσης στο άλλο είναι ίσος με μισή περίοδο της ταλάντωσης. Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλει τη συχνότητα του στο σύστημα. Από την εξίσωση της δύναμης του διεγέρτη συμπεραίνουμε ότι ω = 16 rad/s.

$$Δt = \frac{T}{2} = \frac{2π}{2ω} \Rightarrow \mathbf{Δt = \frac{π}{16}s}$$

γ. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης μέχρι να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητά του ταλαντωτή, φέρνουμε το σύστημα σε κατάσταση συντονισμού, οπότε $\mathbf{ω' = ω_0 = 2πf_0 = 10\ rad/s}$

Ισχύει: $ΣF = mα \Rightarrow F_{επ} + F_{αντ} + F_δ = mα \Rightarrow -200x + F_{αντ} + F_δ = m(-ω'^2Αημω't) \Rightarrow$

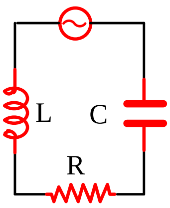
$$-200x + F_{αντ} + F_δ = -mω_0^2 x \Rightarrow -200x + F_{αντ} + F_δ = -200x \Rightarrow \mathbf{F_δ = -F_{αντ}}$$

Δηλαδή κάθε στιγμή οι δύο δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα, άρα όση ενέργεια προσφέρει ο διεγέρτης τόση ενέργεια αφαιρείται εξαιτίας των αντιστάσεων.

δ. Στο συντονισμός αποδείξαμε ότι $F_δ = -F_{αντ} = -(-bυ) = bω_0 Aσυνω_0 t \Rightarrow F_δ = 20συν10t$ (S.I.)

Ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στον ταλαντωτή μέσω της διεγείρουσας δύναμης $F_δ$ ισούται με: $\frac{dW_{προσφ}}{dt} = \frac{F_δ \cdot dx}{dt} = F_δ \cdot υ = bυ \cdot υ = bυ^2 = 4(5συν10\frac{π}{40})^2 \Rightarrow \mathbf{\frac{dW_{προσφ}}{dt} = 50\frac{J}{s}}$

3. Το διπλανό κύκλωμα RLC εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με πλάτος ρεύματος I = 2 A, ο αντιστάτης έχει αντίσταση R = 2 Ω, η γωνιακή συχνότητα της πηγής εναλλασσόμενης τάσης ισούται με $\omega_1 = 15\cdot10^3$ rad/s, ενώ ο συντελεστής αυτεπαγωγής του ιδανικού πηνίου ισούται με L = 25 mH. Αν αυξήσουμε τη γωνιακή συχνότητα της πηγής κατά $5\cdot10^3$ rad/s, τότε το κύκλωμα φτάνει σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος της έντασης του ρεύματος μεταβάλλεται κατά 1 A, ενώ αν μεταβάλλουμε τη γωνιακή συχνότητα από την τιμή ω_1 κατά $10\cdot10^3$ rad/s, φτάνοντας σε νέα τιμή ω_2, το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα γίνεται ξανά ίσο με 2A.



α. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του πυκνωτή,

β. Να βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω_2.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με τη γωνιακή συχνότητα της πηγής εναλλασσόμενης τάσης. Στο σχήμα σας να φαίνονται και οι τιμές ω_1, ω_2 και ω_0 (γωνιακή ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος).

δ. Να υπολογίσετε με ποιο ρυθμό εκλύει το σύστημα ενέργεια όταν βρίσκεται σε συντονισμό.

ε. Να βρείτε πόση θερμότητα εκλύεται σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης στην κατάσταση συντονισμού

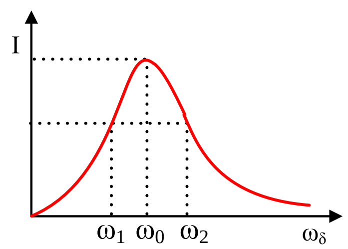
Λύση

α. Το κύκλωμα αρχικά ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = 15\cdot10^3$ rad/s. Σύμφωνα με την εκφώνηση, αν αυξήσουμε τη γωνιακή συχνότητα της πηγής κατά $5\cdot10^3$ rad/s, τότε το κύκλωμα θα βρεθεί σε κατάσταση συντονισμού. Συνεπώς η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_0 του κυκλώματος ισούται με:

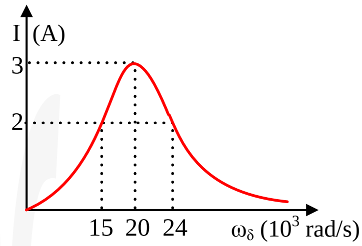
$$\omega_0 = 15\cdot10^3 + 5\cdot10^3 \text{ rad/s} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0 = 20\cdot10^3 \text{ rad/s}}$$

Γνωρίζουμε ότι: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \dfrac{1}{L\omega_0^2} = \dfrac{1}{25\cdot10^{-3}4\cdot10^8} \Rightarrow \mathbf{C = 10^{-7}\,F}$

β. Σύμφωνα με το διπλανό διάγραμμα, η γωνιακή συχνότητα ω_2 για την οποία επιτυγχάνεται ίδιο πλάτος ρεύματος με τη γωνιακή συχνότητα ω_1 θα είναι μεγαλύτερη από τη γωνιακή συχνότητα ω_1, αφού οι δύο αυτές κυκλικές συχνότητες θα πρέπει να βρίσκονται εκατέρωθεν της κυκλικής συχνότητας συντονισμού. Από την εκφώνηση προκύπτει ότι: $\omega_2 = \omega_1 + 9\cdot10^3$ rad/s $\Rightarrow \omega_2 = 24\cdot10^3$ rad/s



γ. Όταν η γωνιακή συχνότητα της πηγής είναι $\omega_0 = 20 \cdot 10^3$ rad/s, το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό αφού βρισκόμαστε σε κατάσταση συντονισμού.



Άρα $I_{max} = I + 1A \Rightarrow I_{max} = 3A$.

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Ο ρυθμός έκλυσης θερμότητας είναι η ισχύς που καταναλώνεται πάνω στην ωμική αντίσταση

$$P_R = I_{max}^2 R \Rightarrow P_R = 9 \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{P_R = 18\,W}$$

ε. Το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα I_{max} με ενεργό τιμή $I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\varepsilon\nu} = 1{,}5\sqrt{2}A$ και η περίοδος της ταλάντωσης στην κατάσταση συντονισμού είναι: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \mathbf{T_0 = \pi \cdot 10^{-4}\,s}$

Η θερμότητα λόγω του φαινομένου joule στο εναλλασσόμενο ρεύμα είναι:

$$Q_j = I_{\varepsilon\nu}^2 R T_0 = 4{,}5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \Rightarrow \mathbf{Q_j = 9\pi \cdot 10^{-4}\,J}$$