Βασικές ασκήσεις στις φθίνουσες ταλαντώσεις.

1. Μικρό σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με πλάτος που μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = 0{,}8e^{-0{,}1t}$ (S.I.). Να υπολογίσετε:

α. το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 20\ell n2$ s.

β. τη χρονική στιγμή t_2 που το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με 0,1 m.

γ. την απώλεια της ενέργειας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2.

Δίνεται η σταθερά της ταλάντωσης $D = 400$ N/m και για τις πράξεις: $\ell n2 = 0{,}7$.

Λύση

α. Για να βρούμε το πλάτος ταλάντωσης του μικρού σώματος τη χρονική στιγμή t_1, αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη χρονική εξίσωση του πλάτους. Έχουμε:

$$A = 0{,}8e^{-0{,}1t} \Rightarrow A = 0{,}8e^{-0{,}1\cdot 20\ell n2} \Rightarrow A = 0{,}8e^{-2\ell n2} \Rightarrow A = 0{,}8e^{-\ell n4} \Rightarrow A = 0{,}8\frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2\,m}$$

β. Για να βρούμε τη χρονική στιγμή t_2 που το πλάτος αποκτά την τιμή 0,1 m, αντικαθιστούμε στη χρονική εξίσωση του πλάτους

$$A = 0{,}8e^{-0{,}1t_2} \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}8e^{-0{,}1t_2} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-0{,}1t_2} \Rightarrow \ell n\frac{1}{8} = -0{,}1t_2 \Rightarrow -3\ell n2 = -0{,}1t_2 \Rightarrow \mathbf{t_2 = 30\ell n2\,s}$$

$t_2 = 30\cdot 0{,}7 \Rightarrow \mathbf{t_2 = 21\ s}$

γ. Για την απώλεια της ενέργειας αφαιρούμε την ενέργεια που είχε το σώμα τη χρονική στιγμή t_1, αυτή της χρονικής στιγμής t_2

$$E_{\alpha\pi} = E_{(t_1)} - E_{(t_2)} = \frac{1}{2}DA_1^2 - \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}400(0{,}04 - 0{,}01) \Rightarrow \mathbf{E_{\alpha\pi} = 6\,J}$$

2. Ένας ταλαντωτής δέχεται δύναμη αντίστασης στην κίνηση του της μορφής $F_{αντ.} = -bυ$ (b = θετική σταθερά) και εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις μικρής απόσβεσης, το πλάτος των οποίων μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-4t}$. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 50$ s ο ταλαντωτής έχει εκτελέσει 200 πλήρεις ταλαντώσεις.

α. Να υπολογίσετε το πηλίκο $\dfrac{A_{k-1}}{A_k}$, όπου A_k το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_k = kT$ και A_{k-1} το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_{k-1} = (k-1)T$ με k = 1, 2, 3,,..

β. Να αποδείξετε ότι το ποσοστό επί τοις εκατό της μείωσης του πλάτους στη χρονική διάρκεια μιας οποιασδήποτε περιόδου της ταλάντωσης παραμένει σταθερό και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του.

Δίνεται για τις πράξεις: e = 2,7.

Λύση

α. Αφού ο ταλαντωτής εκτελεί 200 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονική διάρκεια $t_1 = 50$ s, η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ίση με: $t_1 = 200T \Rightarrow 50 = 200T \Rightarrow T = 0,25$ s.

$$\frac{A_{k-1}}{A_k} = \frac{A_0 e^{-(k-1)\Lambda T}}{A_0 e^{-k\Lambda T}} = e^{-(k-1)\Lambda T} \cdot e^{k\Lambda T} \Rightarrow \frac{A_{k-1}}{A_k} = e^{\Lambda T} = e^{4\cdot 0,25} = e = σταθ.$$

β. Το ποσοστό επί τοις εκατό της μείωσης του πλάτους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{A_{k-1} - A_k}{A_{k-1}} = 1 - \frac{A_k}{A_{k-1}} = 1 - \frac{1}{e} \simeq 0,63 = σταθ.$$

Το πηλίκο $\dfrac{A_{k-1}}{A_k}$ είναι σταθερό για κάθε τιμή του k, επομένως και το ποσοστό μείωσης του πλάτους στη χρονική διάρκεια κάθε περιόδου της ταλάντωσης παραμένει σταθερό. Είναι: π = 63%

3. Ένας ταλαντωτής δέχεται δύναμη αντίστασης στην κίνηση του της μορφής $F_{αντ} = –bυ$ (b = θετική σταθερά) και εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις με συχνότητα f = 20 Hz. Το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$ (Λ = σταθ.) και στο τέλος της πρώτης περιόδου ισούται με $A_1 = 0{,}3$ m, ενώ στο τέλος της δεύτερης περιόδου ισούται με $A_2 = 0{,}25$ m.

α. Να υπολογίσετε το αρχικό πλάτος A_0 της ταλάντωσης.

β. Να βρείτε τη σταθερά Λ.

γ. Αν το πλάτος στο τέλος της $19^{ης}$ περιόδου της ταλάντωσης είναι $A_{19} = 0{,}03$ m, να βρείτε το πλάτος στο τέλος της $20^{ης}$ περιόδου.

Για τις πράξεις δίνεται ότι ℓn1,2 = 0,18.

Λύση

α. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{-\Lambda t}$. Επομένως ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_0 = \frac{A_1^2}{A_2} \Rightarrow A_0 = 0{,}36\,\text{m}$$

β. Για να βρούμε τη σταθερά Λ, αντικαθιστούμε στον τύπο $A = A_0e^{-\Lambda t}$

$$A_1 = A_0e^{-\Lambda T} \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}36e^{-\Lambda T} \Rightarrow \ell n\frac{0{,}3}{0{,}36} = -\Lambda T \Rightarrow -\ell n1{,}2 = -\Lambda\frac{1}{f} \Rightarrow \Lambda = 20\ell n1{,}2\ \text{s}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Lambda = 3{,}6\,s^{-1}}$$

γ. Για κάθε ταλάντωση ισχύει: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_{19}}{A_{20}} \Rightarrow A_{20} = \frac{A_1A_{19}}{A_0} \Rightarrow A_{20} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}03}{0{,}36} \Rightarrow A_{20} = 0{,}025\text{m}$

4. Η αρχική ενέργεια ενός ταλαντωτή που εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση ισούται με 16 J. Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ (όπου Λ = θετική σταθερά) και τη χρονική στιγμή $t_1 = 20$ s ισούται με το μισό αυτού που είχε τη χρονική στιγμή t = 0. Να υπολογίσετε:

α. τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με το 1/8 του αρχικού,

β. τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$.

Λύση

α. Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση: $A = A_0 e^{-\Lambda t}$

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow -\ell n2 = -\Lambda t_1 \Rightarrow \mathbf{\Lambda = \frac{\ell n2}{20} s^{-1}}$$

Για τη χρονική στιγμή t_2 έχουμε: $A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow \frac{A_0}{8} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow -\ell n8 = -\Lambda t_2 \Rightarrow 3\ell n2 = \frac{\ell n2}{20} t_2 \Rightarrow \mathbf{t_2 = 60\,s}$

β. Η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή υπολογίζεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} D A^2$.

Τη χρονική στιγμή t_1: $E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} D \frac{A_0^2}{4} = \frac{E_0}{4} \Rightarrow \mathbf{E_1 = 4\,J}$

Τη χρονική στιγμή t_2: $E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} D \frac{A_0^2}{64} = \frac{E_0}{64} \Rightarrow \mathbf{E_2 = 0,25\,J}$

Επομένως η μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος $E_{απ}$ (απώλεια μηχανικής ενέργειας) στη χρονική διάρκεια Δt είναι ίση με: $E_{απ} = E_1 - E_2 \Rightarrow \mathbf{E_{απ} = 3,75\,J}$

5. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 400 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα αρχίζει να εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης με συχνότητα f = 5 Hz και με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = 0{,}8e^{-(2\ell n2)t}$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή που έχουν ολοκληρωθεί 10 ταλαντώσεις.

β. Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό της απώλειας της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή στη χρονική διάρκεια των 15 πρώτων ταλαντώσεων.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ενέργειας του ταλαντωτή και κατόπιν να υπολογίσετε τον αριθμό των πλήρων ταλαντώσεων από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή που η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος έχει υποτετραπλασιαστεί.

Λύση

α. Η περίοδος T της ταλάντωσης είναι: $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{5} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\,s}$

Οι 10 ταλαντώσεις θα έχουν ολοκληρωθεί τη χρονική στιγμή: $t_1 = 10T \Rightarrow \mathbf{t_1 = 2\ s}$

Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο τέλος των 10 πλήρων ταλαντώσεων θα είναι:

$$A_1 = 0{,}8e^{-(2\ell n2)t_1} = 0{,}8e^{-(2\ell n2)2} = 0{,}8e^{-4\ell n2} = 0{,}8e^{-\ell n16} = \frac{0{,}8}{16} \Rightarrow \mathbf{A_1 = 0{,}05\,m}$$

β. Το ποσοστό επί τοις εκατό της απώλειας της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή υπολογίζεται από τη σχέση $\frac{E_{\alpha\pi}}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\varepsilon\lambda}}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA_2^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} = 1 - \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2$.

Για τη χρονική διάρκεια των 15 πρώτων ταλαντώσεων είναι: $t_2 = 15T = 15 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \mathbf{t_2 = 3\ s}$

$$A_2 = 0{,}8e^{-(2\ell n2)t_2} = 0{,}8e^{-(2\ell n2)3} = 0{,}8e^{-6\ell n2} = 0{,}8e^{-\ell n64} = \frac{0{,}8}{64} \Rightarrow \mathbf{A_2 = 0{,}0125\,m}$$

Άρα: $\frac{E_{\alpha\pi}}{E_{\alpha\rho\chi}} = 1 - \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{0{,}0125}{0{,}8}\right)^2 = 0{,}9975$ ή $99{,}75\%$

γ. Η ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 \left(e^{-\Lambda t}\right)^2 \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$

Η αρχική ενέργεια είναι: $E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}400 \cdot 0,64 \Rightarrow \mathbf{E_0 = 128\,J}$

Επομένως: $\mathbf{E = 128e^{-(4\ell n2)t}}$ (S.I.)

Σύμφωνα με τη σχέση που αποδείξαμε παραπάνω έχουμε:

$$E = E_0 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \frac{E_0}{4} = E_0 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-2\Lambda t} \Rightarrow -2\ell n2 = -2\Lambda t \Rightarrow 2\ell n2 = 2(2\ell n2)t \Rightarrow \mathbf{t = 0,5\,s}$$

6. Σώμα δέχεται δύναμη αντίστασης στην κίνηση του της μορφής $F_{αντ} = –0{,}02υ$ (S.I.) και εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση μικρής απόσβεσης με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = 0{,}8e^{–Λt}$ (S.I.), όπου Λ = θετική σταθερά. Στο τέλος της 1ης περιόδου της ταλάντωσης το πλάτος έχει μειωθεί στην τιμή $A_1 = 0{,}6$ m και η ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με $E_1 = 36$ J. Να υπολογίσετε:

α. το πλάτος της ταλάντωσης στο τέλος της 2ης περιόδου,

β. το έργο της δύναμης αντίστασης κατά τη χρονική διάρκεια από τη στιγμή t = 0 έως το τέλος της 1ης περιόδου της ταλάντωσης, όπως επίσης και κατά τη χρονική διάρκεια από το τέλος της 1ης έως το τέλος της 2ης περιόδου,

γ. το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σώματος ισούται με $υ_1 = 1{,}5$ m/s.

Λύση

α. Σε κάθε φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0e^{–Λt}$, το αρχικό πλάτος (A_0), το πλάτος στο τέλος της πρώτης περιόδου (A_1) και το πλάτος στο τέλος της δεύτερης περιόδου (A_2) ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1^2}{A_0} \Rightarrow \mathbf{A_2 = 0{,}45\,m}$$

β. Η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης οφείλεται στη δύναμη αντίστασης $F_{αντ}$. Κατά συνέπεια το έργο της δύναμης αντίστασης εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον (απώλεια ενέργειας από το σύστημα). Επομένως το έργο της δύναμης αντίστασης ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος.

Ισχύει: $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow D = \frac{2E_1}{A_1^2} \Rightarrow D = \frac{2\cdot 36}{0{,}36} \Rightarrow \mathbf{D = 200\,\frac{N}{m}}$

$$E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}64 \Rightarrow \mathbf{E_0 = 64\,J} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}2025 \Rightarrow \mathbf{E_2 = 20{,}25\,J}$$

Για τη χρονική διάρκεια της 1ης περιόδου έχουμε: $W_{F_{αντ}} = E_1 - E_0 = 36 - 64 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{αντ}} = –28\,J}$

Για τη χρονική διάρκεια της 2ης περιόδου έχουμε: $W_{F_{αντ}} = E_2 - E_1 = 20{,}25 - 36 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{αντ}} = –15{,}75\,J}$

Παρατήρηση: Όπως φαίνεται από τους προηγούμενους υπολογισμούς, το έργο της δύναμης αντίστασης (όπως και η απώλεια ενέργειας) δεν είναι ίδιο στη χρονική διάρκεια κάθε περιόδου. Το ποσοστό όμως της μείωσης της ενέργειας του συστήματος (όπως και το ποσοστό μείωσης του πλάτους της ταλάντωσης) είναι ίδιο για τη χρονική διάρκεια οποιασδήποτε περιόδου.

γ. Επειδή η απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης οφείλεται στη δύναμη αντίστασης στην κίνηση $F_{αντ}$ συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης ισούται με την ισχύ της δύναμης αυτής. Συνεπώς:

$$\frac{dW_{F_{αντ}}}{dt} = \frac{F_{αντ}dx}{dt} = -bυ \cdot υ = -bυ^2 \Rightarrow \frac{dW_{F_{αντ}}}{dt} = -0,02 \cdot 2,25 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dW_{F_{αντ}}}{dt} = -0,045\frac{J}{s}}$$

7. Ένα σώμα μάζας m = 1 kg που κινείται κατά μήκος του άξονα x′x δέχεται εξής δυνάμεις:

δύναμη επαναφοράς της μορφής $F_{επ} = –100x$ (S.I.), όπου x η αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, και δύναμη αντίστασης στην κίνηση της μορφής $F_{αντ} = –8υ$ (S.I.), όπου υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και ξεκινά να εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του της μορφής $A = 0{,}6e^{-6t}συν8t$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t = 0.

β. Να βρείτε την περίοδο της φθίνουσας ταλάντωσης.

γ. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα διέρχεται από τη θέση x_1 η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του ισούται με $α_1 = –56\ m/s^2$ και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του ισούται με $υ_1 = 2$ m/s. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης αντίστασης ($F_{αντ}$) από τη χρονική στιγμή t = 0 έως τη χρονική στιγμή t_1.

Λύση

α. Όπως βλέπουμε από τις παραπάνω εξισώσεις για τις δυνάμεις οι αποσβέσεις σε αυτή την περίπτωση είναι αρκετά μεγάλες οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $α = –ω^2x$, αφού η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης (**ω = 8 rad/s**) διαφέρει αρκετά από αυτή που θα είχε αν το σώμα εκτελούσε αμείωτη ταλάντωση ($k = mω_0^2 \Rightarrow ω_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \mathbf{ω_0 = 10\frac{rad}{s}}$).

Τη χρονική στιγμή t = 0 είναι υ = 0, ενώ η απομάκρυνση x μπορεί να υπολογιστεί από τη χρονική της εξίσωση. Είναι $x = 0{,}6e^{-6t}συν8t$ και για t = 0 προκύπτει: x = 0,6 m

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης είναι της μορφής:

$ΣF = F_{επ} + F_{αντ} \Rightarrow ΣF = –100x – 8υ \Rightarrow mα = –100x – 8υ \Rightarrow \mathbf{α = –60\ m/s^2}$

β. Η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι ω = 8 rad/s. Ισχύει:

$$T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{π}{4}\,s}$$

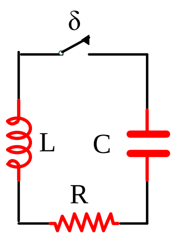
γ. Το έργο της δύναμης αντίστασης στην κίνηση ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης. Δηλαδή: $E_{αρχ} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \mathbf{E_{αρχ} = 18\,J}$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος είναι $υ_1$ = 2 m/s και $α_1$ = –56 m/s^2 αντίστοιχα. Η απομάκρυνση x_1 την ίδια στιγμή μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης. Είναι: $mα_1 = -100x_1 - 8υ_1 \Rightarrow -56 = -100x_1 - 16 \Rightarrow x_1 = 0{,}4$ m.

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι $υ_1$ = 2 m/s και x_1 = 0,4 m.

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει $E_{τελ} = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 2 + 8 \Rightarrow \mathbf{E_{τελ} = 10\,J}$.

Το έργο της δύναμης των αντιστάσεων είναι ίσο με: $W_{F_{αντ}} = E_{τελ} - E_{αρχ} = 10 - 18 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{αντ}} = -8\,J}$



8. Το κύκλωμα RLC του σχήματος εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο $T = 10^{-3}$ s και το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τον τύπο $Q = 16\cdot10^{-6}e^{-(2\ell n2)t}$ (S.I.). Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = 10$ μF.

α. Να βρείτε μετά από πόσες πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή έχει υποτετραπλασιαστεί.

β. Να υπολογίσετε τη θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη R στη χρονική διάρκεια των 500 πρώτων ταλαντώσεων, θεωρώντας ότι οι απώλειες ενέργειας οφείλονται μόνο στο φαινόμενο Joule.

Λύση

α. Το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τον τύπο:

$$Q = Q_0e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{Q_0}{4} = Q_0e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow -2\ell n2 = -\Lambda t \Rightarrow 2\ell n2 = (2\ell n2)t \Rightarrow \mathbf{t = 1s}$$

Επομένως ο αριθμός των ταλαντώσεων είναι: $t = NT \Rightarrow 1 = N\cdot10^{-3} \Rightarrow N = 1000$ ταλ.

β. Η θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη ισούται με την απώλεια ενέργειας κατά τη διάρκεια των φθίνουσων ταλαντώσεων. Για τις 500 ταλαντώσεις έχουμε $t_2 = 500T \Rightarrow t_2 = 0{,}5$ s.

$$Q_2 = 16\cdot10^{-6}e^{-(2\ell n2)t_2} = 16\cdot10^{-6}e^{-(2\ell n2)0,5} = 16\cdot10^{-6}e^{-\ell n2} \Rightarrow \mathbf{Q_2 = 8\cdot10^{-6}\,C}$$

Η αρχική ενέργεια είναι: $E_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{256\cdot10^{-12}}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E_0 = 128\cdot10^{-6}\,J}$

Η ενέργεια του κυκλώματος την χρονική στιγμή t_2 είναι: $E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{64\cdot10^{-12}}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E_2 = 32\cdot10^{-6}\,J}$

$E_{\alpha\pi} = E_0 - E_2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 128\cdot10^{-6} - 32\cdot10^{-6} \Rightarrow \mathbf{E_{\alpha\pi} = 96\cdot10^{-6}\,J}$