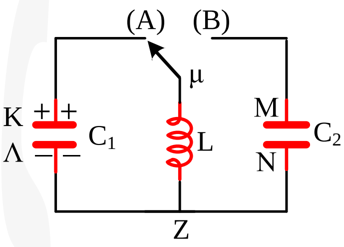
ΜΕΤΑΓΩΓΗ ΑΠΟ ΤΟ ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ LC ΣΤΟ ΑΛΛΟ.

ΔΥΟ ΠΥΚΝΩΤΕΣ ΚΑΙ ΕΝΑ ΠΗΝΙΟ



1. Στο κύκλωμα του σχήματος το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 10 mH, ο πυκνωτής (1) έχει χωρητικότητα C_1 = 1 μF, ενώ ο πυκνωτής (2) έχει χωρητικότητα C_2 = 4 μF. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο πυκνωτής (1) είναι πλήρως φορτισμένος, με τον οπλισμό K να είναι θετικά φορτισμένος. Μεταφέρουμε το μεταγωγός μ βρίσκεται στη θέση (A) και το κύκλωμα LC_1 εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση με ολική ενέργεια $E_1 = 8\cdot10^{-6}$ J, ενώ ο πυκνωτής (2) είναι αφόρτιστος. Τη χρονική στιγμή, όπου $t_1 = \frac{3T_1}{4}$, όπου T_1 η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος LC_1, μεταφέρουμε ακαριαία τον μεταγωγό στη θέση (B) χωρίς να προκληθεί σπινθήρας και το κύκλωμα LC_2 ξεκινά αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Να βρείτε:

α. το πλάτος φορτίου Q_1, στον πυκνωτή (1) και την μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος I_1.

β. το πλάτος της έντασης I_2 στο κύκλωμα LC_2 και την χρονοεξίσωση του θεωρώντας την φορά που έχει κατά την έναρξη των ταλαντώσεων στο κύκλωμα LC_2 ως θετική.

γ. τη μέγιστη ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου στο κύκλωμα LC_2.

δ. ποιος από τους οπλισμούς M, N του πυκνωτή (2) φορτίζεται πρώτος θετικά, όταν το κύκλωμα LC_2 ξεκινήσει ηλεκτρική ταλάντωση.

Λύση

α. Από την ενέργεια της ταλάντωσης στο κύκλωμα LC_1 μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγιστο φορτίο.

$$E_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{2E_1C_1} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{2\cdot8\cdot10^{-6}\cdot10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{Q_1 = 4\cdot10^{-6}\ C}$$

Για το πλάτος του ρεύματος ισχύει: $E_1 = \frac{1}{2}LI_1^2 \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{L}} \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{2\cdot8\cdot10^{-6}}{10^{-2}}} \Rightarrow \mathbf{I_1 = 4\cdot10^{-2}\ A}$

Η κυκλική συχνότητα είναι $I_1 = \omega_1 Q_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_1}{Q_1} \Rightarrow \omega_1 = \frac{4\cdot10^{-2}}{4\cdot10^{-6}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 10^4\ \frac{rad}{s}}$

και η περίοδος $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \mathbf{T_1 = 2\pi \cdot 10^{-4}\ s}$

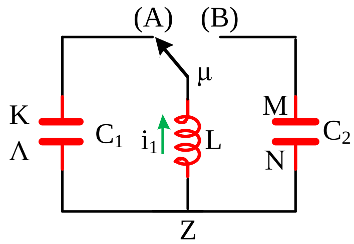
Σημείωση: Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την κυκλική συχνότητα ω_1 και μετά $I_1 = \omega_1 Q_1$.

β. Τη στιγμή που μεταφέρουμε τον μεταγωγό από το (Α) στο (Β) το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο εκείνη τη στιγμή είναι $i_1 = -I_1 \eta\mu\omega_1 t_1 \Rightarrow i_1 = -I_1 \eta\mu \dfrac{2\pi}{T_1}\dfrac{3T_1}{4} \Rightarrow i_1 = -I_1 \eta\mu \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{i_1 = I_1}$

Η ταλάντωση στο κύκλωμα LC_2 ξεκινά έχοντας την στιγμή της έναρξης ρεύμα $|i_2| = I_1$ και μηδενικό φορτίο.

Άρα το αρχικό ρεύμα είναι και το μέγιστο δηλαδή $\mathbf{I_2 = I_1 = 4 \cdot 10^{-2}\ A}$.

Στα κυκλώματα LC την αρχική φορά του ρεύματος την θεωρούμε ως αρνητική (δηλαδή το ρεύμα αρχικά κατευθύνεται από το Α → Ζ). Βρήκαμε ότι τη στιγμή t_1 το ρεύμα είναι $\mathbf{i_1 = +I_1}$ δηλαδή κατευθύνεται από το Ζ → Α όπως στο σχήμα.



Σύμφωνα με την εκφώνηση η αρχική φορά του ρεύματος θεωρείται ως θετική άρα για το κύκλωμα LC_2 έχουμε για $t' = 0$: $i_2 = I_2 \Rightarrow i = -I_2 \eta\mu\varphi_0 = I_2 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}}\ \mathbf{rad}$

Η περίοδος είναι: $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{T_2 = 4\pi \cdot 10^{-4}\ s}$

και η κυκλική συχνότητα $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 5 \cdot 10^3\ \dfrac{rad}{s}}$

Άρα: $i_2 = -I_2 \eta\mu(\omega_2 t' + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i_2 = -4 \cdot 10^{-2} \eta\mu(5 \cdot 10^3 t' + \dfrac{3\pi}{2})}$ για $t' \geq 0$

Σημείωση: Αν σε κάποια άσκηση ζητά να γράψουμε την χρονοεξίσωση χωρίς μηδενισμό εκ νέου του χρόνου ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και μετά κάνουμε αλλαγή μεταβλητής, αφού ισχύει κάθε χρονική στιγμή $t = t' + t_1 \Rightarrow t' = t - t_1$ και $t_1 = \dfrac{3T_1}{4} \Rightarrow t_1 = 1{,}5\pi \cdot 10^{-4}$ s οπότε $t' = t - 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ s και

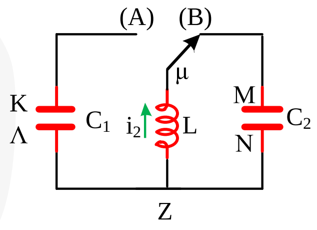
$$\mathbf{i_2 = -4 \cdot 10^{-2} \eta\mu\left(5 \cdot 10^3 (t - 1{,}5 \cdot 10^{-4}) + \dfrac{3\pi}{2}\right)} \text{ για } t \geq 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

γ. Επειδή ισχύει $I_1 = I_2$ θα έχουμε και $E_1 = E_2$.

Άρα $E_2 = \frac{1}{2}C_2V_{2,max}^2 \Rightarrow V_{2,max} = \sqrt{\frac{2E_2}{C_2}} \Rightarrow V_{2,max} = \sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-6}}} \Rightarrow \mathbf{V_{2,max} = 2\,V}$

Αλλά κάθε στιγμή η τάση στα άκρα του πυκνωτή και η $E_{αυτ}$ του πηνίου είναι ίσες, άρα:

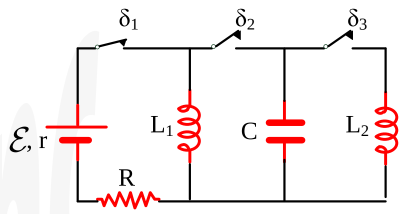
$\mathbf{E_{αυτ,max} = V_{2,max} = 2\ V}$.



δ. Την χρονική στιγμή t_1 που γίνεται η αλλαγή του διακόπτη το ρεύμα έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Η φορά αυτή είναι η συμβατική φορά του ρεύματος δηλαδή η κίνηση θετικών φορτίων. Τα υποθετικά αυτά θετικά φορτία κατευθύνονται προς τον οπλισμό Μ του πυκνωτή (2), ό οποίος είναι και αυτός που θα φορτιστεί πρώτος θετικά.

ΔΥΟ ΠΗΝΙΑ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΠΥΚΝΩΤΗΣ

2. Στο κύκλωμα του σχήματος, ο πυκνωτής C έχει χωρητικότητα C = 20 μF, τα πηνία έχουν συντελεστή αυτεπαγωγής L_1 = 2 mH και L_2 = 8 mH, ο αντιστάτης έχει αντίσταση R = 8 Ω και η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$ = 40 V, και



εσωτερική αντίσταση r. Αρχικά ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός και έχει αποκατασταθεί το ρεύμα στο κύκλωμα, οι άλλοι δύο διακόπτες είναι ανοιχτοί όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τη χρονική στιγμή t = 0 ο διακόπτης δ_1 ανοίγει και ταυτόχρονα και χωρίς την δημιουργία σπινθήρα κλείνει ο διακόπτης δ_2 και το κύκλωμα L_1C αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση με ενέργεια $E_1 = 16\cdot10^{-3}$ J.

α. Να βρείτε την εσωτερική αντίσταση της πηγής.

β. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις, που δίνουν το φορτίο του πυκνωτή και την ένταση του ρεύματος, στο κύκλωμα L_1C.

Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13\pi}{3}\cdot10^{-4}\,\text{s}$ ανοίγουμε τον διακόπτη δ_2 κλείνοντας ταυτόχρονα τον διακόπτη δ_3, χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας.

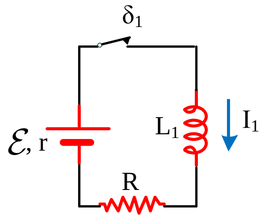
γ. Να υπολογίσετε το πλάτος του φορτίου και την μέγιστη ενέργεια που θα αποθηκευτεί στο πηνίο αυτεπαγωγής L_2 καθώς και τη χρονική στιγμή t_2 που θα συμβεί αυτό για πρώτη φορά.

δ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση του φορτίου του πυκνωτή σε σχέση με το χρόνο από την στιγμή t = 0 ως τη χρονική στιγμή $t_3 = \frac{37\pi}{3}\cdot10^{-4}\,\text{s}$.

Λύση

α. Το πλάτος του ρεύματος στο αρχικό κύκλωμα είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{L_1}} \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{2\cdot16\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}}} \Rightarrow \mathbf{I_1 = 4\,A}$$



Το ρεύμα αυτό είναι το ίδιο με το σταθερό ρεύμα που κυκλοφορούσε στο αρχικό κύκλωμα, το οποίο λόγω αυτεπαγωγής αποτέλεσε και το μέγιστο ρεύμα των μετέπειτα ηλεκτρικών ταλαντώσεων στο κύκλωμα L_1C.

Για το κύκλωμα του σχήματος αφού έχει σταθεροποιηθεί το ρεύμα ισχύει ο νόμος του Ohm στη μορφή $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r} \Rightarrow r = \dfrac{\mathcal{E}}{I_1} - R \Rightarrow r = \dfrac{40}{4} - 8 \Rightarrow \mathbf{r = 2\Omega}$

Σημείωση: Πριν την αποκατάσταση του ρεύματος ο νόμος του Ohm γράφεται στη μορφή $i = \dfrac{\mathcal{E} - |E_{αυτ}|}{R_{ολ}}$ όπως μάθαμε στην Β λυκείου.

β. Το πλάτος του φορτίου μπορεί να βρεθεί από την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_1 = \frac{Q_1^2}{2C} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{2E_1C} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{2\cdot 16\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-5}} \Rightarrow \mathbf{Q_1 = 8\cdot 10^{-4}\ C}$$

επίσης $I_1 = \omega_1 Q_1 \Rightarrow \mathbf{\omega_1 = 5\cdot 10^3\ rad/s}$ και η περίοδος είναι: $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \mathbf{T_1 = 4\pi\cdot 10^{-4}\ s}$

Επειδή την $t = 0$ το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν και το ρεύμα μέγιστο έχουμε αρχική φάση.

Θεωρώ την φορά του ρεύματος την στιγμή της εκκίνησης των ταλαντώσεων στο κύκλωμα L_1C ως θετική οπότε: $i = I \Rightarrow -I\eta\mu\varphi_0 = I \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \xrightarrow{0\le\varphi_0\le 2\pi} \mathbf{\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}\ rad}$

Άρα οι εξισώσεις είναι: $q_1 = Q_1\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{q_1 = 8\cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(5000t + \dfrac{3\pi}{2})\ (S.I.)}$ και

$$i_1 = -I_1\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i_1 = -4\eta\mu(5000t + \frac{3\pi}{2})\ (S.I.)}$$

γ. Τη στιγμή λίγο πριν ανοίξουμε το διακόπτη δ_2 το φορτίο στον πυκνωτή είναι:

$$q_1 = 8\cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(5000\frac{13\pi}{3}\cdot 10^{-4} + \frac{3\pi}{2}) = 8\cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(\frac{11\pi}{3}) \Rightarrow \mathbf{q_1 = 4\cdot 10^{-4}\ C}.$$

Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις στο κύκλωμα L_2C ξεκινούν με φορτίο τιμής q_1 όσο δηλαδή είχαμε και πριν την αλλαγή στα κυκλώματα. Άρα $\mathbf{Q_2 = |q_1| = 4\cdot 10^{-4}\ C}$.

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις ισχύει

$$U_{B,max} = U_{E,max} \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C} \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}\frac{16\cdot 10^{-8}}{2\cdot 10^{-5}} \Rightarrow \mathbf{U_{B,max} = 4\cdot 10^{-3}\ J}$$

Την μέγιστη ενέργεια την αποκτά το πηνίο μόλις εκφορτιστεί ο πυκνωτής, δηλαδή σε χρόνο $\frac{T_2}{4}$.

Είναι $T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{8\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-5}} \Rightarrow \mathbf{T_2 = 8\pi\cdot 10^{-4}\ s}$.

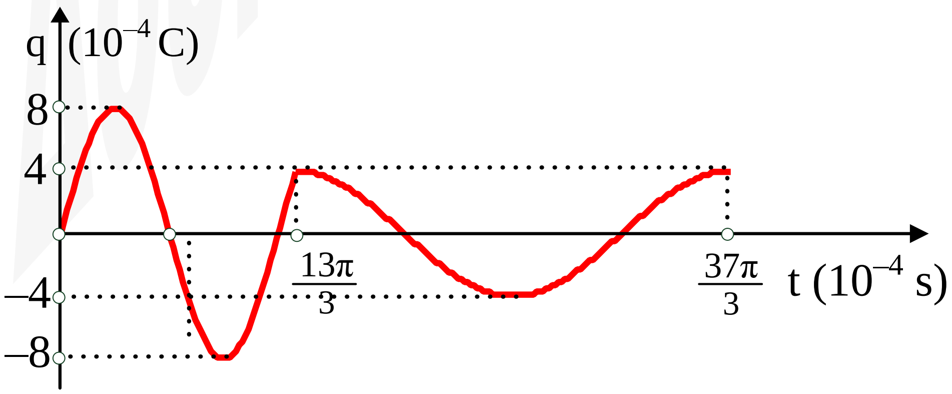
Άρα $t_2 = t_1 + \frac{T_2}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{14\pi}{3}\cdot 10^{-4} + \frac{8\pi}{4}\cdot 10^{-4} \Rightarrow \mathbf{t_2 = \frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\ s}$

δ. Το κύκλωμα L_2C ξεκινά τις ταλαντώσεις του έχοντας μέγιστο φορτίο και μηδενικό ρεύμα, δηλαδή εκτελεί ταλαντώσεις χωρίς αρχική φάση. Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 2500\frac{rad}{s}}$ και η χρονοεξίσωση του φορτίου $q_2 = Q_2 συν\omega_2 t' \Rightarrow \mathbf{q_2 = 4\cdot 10^{-4} συν2500t'\ (S.I.)}$ για $t' \geq 0$ ή

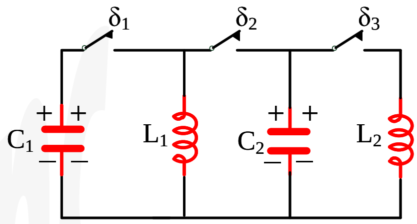
Άρα $\mathbf{q_2 = 4\cdot 10^{-4} συν2500(t - \frac{13\pi}{3}\cdot 10^{-4})\ (S.I.)}$ $t \geq t_1$

$$q = \begin{cases} 8\cdot 10^{-4} συν(5000t + \frac{3\pi}{2}) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{13\pi}{3}\cdot 10^{-4} s \\ 4\cdot 10^{-4} συν2500(t - \frac{13\pi}{3}\cdot 10^{-4}) & \text{για } t > \frac{13\pi}{3}\cdot 10^{-4} s \end{cases} \quad (S.I.)$$

Η χρονική στιγμή t_3 αντιστοιχεί σε $t_3 = t_1 + T_2$ και η γραφική παράσταση (με τη βοήθεια του Graph) φαίνεται παρακάτω.



ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ LC ΠΟΥ ΚΑΤΑΛΗΓΟΥΝ ΣΕ ΕΝΑ



3. Στο διπλανό σχήμα οι πυκνωτές έχουν χωρητικότητα C_1 = 3,2 μF και C_2 = 80 μF, ενώ τα πηνία παρουσιάζουν συντελεστή αυτεπαγωγής L_1 = 2 mH και L_2 = 0,5 mH. Τα υπόλοιπα στοιχεία δεν παρουσιάζουν αντιστάσεις. Φορτίζουμε τους πυκνωτές με φορτίο Q_1 = 0,8 μC και Q_2 = 4 μC. Κλείνουμε τους διακόπτες $δ_1$ και $δ_3$ ταυτόχρονα και τα κυκλώματα L_1C_1 και L_2C_2 αρχίζουν να εκτελούν ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Α. Να γράψετε τις χρονοεξισώσεις του φορτίου και του ρεύματος στο κάθε κύκλωμα.

Β. Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{20\pi}{3} \cdot 10^{-4}\,\text{s}$, ανοίγουμε τους διακόπτες $δ_1$ και $δ_3$ ενώ ταυτόχρονα κλείσουμε τον $δ_2$ χωρίς καμία δημιουργία σπινθήρα.

α. Να βρείτε την περίοδο των ταλαντώσεων στο κύκλωμα L_1C_2 και την ενέργεια του.

β. Να σχεδιάσετε την πολικότητα του πυκνωτή C_2 και του πηνίου L_1 την χρονική στιγμή t_1^+ (δηλαδή αμέσως μετά την δημιουργία του κυκλώματος L_1C_2), και να εξηγήσετε αν την στιγμή εκείνη ο πυκνωτής C_2 φορτίζεται ή εκφορτίζεται.

γ. να βρείτε τις χρονοεξισώσεις φορτίου και ρεύματος στο κύκλωμα L_1C_2 για $t \geq t_1$ θεωρώντας για το ρεύμα ως θετική την φορά που θα θεωρήσουμε και στις αρχικές ταλαντώσεις.

Γ. Ποια είναι η πρώτη χρονική στιγμή που αν ανοίξουμε τους διακόπτες $δ_1$ και $δ_3$ και κλείσουμε τον $δ_2$ (χωρίς δημιουργία σπινθήρα) θα πετύχουμε το κύκλωμα L_1C_2 να ταλαντώνεται με την μέγιστη δυνατή ενέργεια;

Θεωρήστε ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας λόγω Η/Μ ακτινοβολίας.

Λύση

Α. Οι περίοδοι των δύο ταλαντώσεων είναι αντίστοιχα:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1C_1} \Rightarrow \mathbf{T_1 = 1,6\pi \cdot 10^{-4}\,s} \text{ και } T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C_2} \Rightarrow \mathbf{T_2 = 4\pi \cdot 10^{-4}\,s}.$$

Ενώ οι αντίστοιχες κυκλικές συχνότητες: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 1,25 \cdot 10^4 \frac{rad}{s}}$ και $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = \frac{10^4}{2} \frac{rad}{s}}$.

Οπότε οι ζητούμενες σχέσεις είναι:

$$q_1 = Q_1 \sigma\upsilon\nu\omega_1 t \Rightarrow \mathbf{q_1 = 0,8\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu 1,25\cdot 10^4 t \quad (S.I.)}$$

$$i_1 = -I_1 \eta\mu\omega_1 t \Rightarrow \mathbf{i_1 = -10^{-2}\eta\mu 1,25\cdot 10^4 t \quad (S.I.)}$$

$$q_2 = Q_2 \sigma\upsilon\nu\omega_2 t \Rightarrow \mathbf{q_2 = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu 5\cdot 10^3 t \quad (S.I.)}$$

$$i_2 = -I_2 \eta\mu\omega_2 t \Rightarrow \mathbf{i_2 = -2\cdot 10^{-2}\eta\mu 5\cdot 10^3 t \quad (S.I.)}$$

Β. α. Την στιγμή ελάχιστα πριν κάνουμε την αλλαγή στους διακόπτες το ρεύμα στο πηνίο L_1 και το φορτίο στον πυκνωτή C_2 είχαν τιμές:

$$i_1 = -10^{-2}\eta\mu\left(1,25\cdot 10^4 \frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) \Rightarrow i_1 = -10^{-2}\eta\mu\frac{25\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{i_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10^{-2}\ A}$$

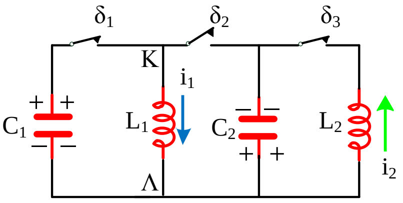
$$q_2 = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu\left(5\cdot 10^3\cdot\frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) \Rightarrow q_2 = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi}{3}\right) \Rightarrow \mathbf{q_2 = -2\cdot 10^{-6}\ C}$$

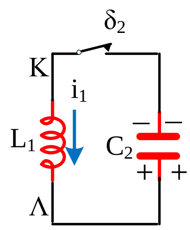
Η ενέργεια του κυκλώματος L_1C_2 είναι: $E = U_B + U_E \Rightarrow E = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-3}\frac{3}{4}\cdot 10^{-4} + \frac{1}{2}\frac{4\cdot 10^{-12}}{8\cdot 10^{-5}} \Rightarrow E = \frac{3}{4}\cdot 10^{-7} + \frac{1}{4}\cdot 10^{-7} \Rightarrow \mathbf{E = 10^{-7}\ J}$$

Η περίοδος είναι: $T = 2\pi\sqrt{L_1C_2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{2\cdot 10^{-3}\cdot 8\cdot 10^{-5}} \Rightarrow \mathbf{T = 8\pi\cdot 10^{-4}\ s}$

β. Σύμφωνα με την θεωρία του σχολικού βιβλίου η αρχική φορά (από τον θετικό οπλισμό στον αρνητικό) θεωρείται ως αρνητική. Για τον πυκνωτή οι χρονοεξισώσεις αναφέρονται στον αρχικά θετικά φορτισμένο οπλισμό. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ρεύματα και πολικότητες όπως στο διπλανό σχήμα.





Την στιγμή t_1 το ρεύμα στο πηνίο L_2 είναι:

$$i_2 = -2\cdot 10^{-2}\eta\mu\left(5\cdot 10^3\frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) \Rightarrow \mathbf{i_2 = +\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\ A}$$

και το φορτίο στον πυκνωτή $q_1 = 0,8\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu\left(1,25\cdot 10^4\frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) \Rightarrow \mathbf{q_1 = 0,4\sqrt{3}\cdot 10^{-6}C}$

(Η εύρεση του ρεύματος i_2 και του φορτίου q_1 δεν ήταν απαραίτητα να βρεθούν)

Βλέπουμε το ρεύμα κατευθύνεται από τον αρνητικό στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή άρα εκείνη τη στιγμή ο πυκνωτής φορτίζεται.

γ. Την στιγμή έναρξης των ταλαντώσεων στο κύκλωμα L_1C_2 έχουμε και φορτίο και ρεύμα άρα υπάρχει αρχική φάση.

Για t = 0 έχουμε: $q = Q\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow -2\cdot 10^{-6} = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{0\leq\varphi_0<2\pi\,\text{rad}}$

$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\text{rad} \\ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}\text{rad} \end{cases}$ και επειδή στο αρχικό κύκλωμα η φορά του ρεύματος στο πηνίο L_1 είναι θετική όταν αυτό κινείται από το Λ στο Κ, το ρεύμα την χρονική στιγμή t_1^+ ($t' = 0$) θα το θεωρήσουμε αρνητικό.

Για $t' = 0$: $i = -I\eta\mu\frac{2\pi}{3} < 0$ και $i = -I\eta\mu\frac{5\pi}{3} > 0$ άρα $\varphi_0 = 2\pi/3\,\text{rad}$.

Έχουμε: $E = \frac{1}{2}L_1I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2E}{L_1}} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \mathbf{I = 10^{-2}\ A}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{8\pi\cdot 10^{-4}} \Rightarrow \omega = \frac{10^4}{4}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2500\frac{rad}{s}}$ και

$I = \omega Q \Rightarrow Q = \frac{I}{\omega} \Rightarrow Q = \frac{10^{-2}}{2500} \Rightarrow \mathbf{Q = 4\cdot 10^{-6}\ C}$

Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι: $q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{q = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu(2500t' + \frac{2\pi}{3})}$ **(S.I.)** για $t' \geq 0$ ή

$\mathbf{q = 4\cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu\left[2500\left(t - \frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]}$ **(S.I.)** για $t \geq t_1$

$i = -I\eta\mu(\omega t' + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i = -10^{-2}\eta\mu(2500t' + \frac{2\pi}{3})}$ **(S.I.)** για $t' \geq 0$ ή

$\mathbf{i = -10^{-2}\eta\mu\left[2500\left(t - \frac{20\pi}{3}\cdot 10^{-4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]}$ **(S.I.)** για $t \geq t_1$

(Η στιγμή $t' = 0$ προκύπτει αν θεωρήσουμε την στιγμή t_1 ως η στιγμή που μηδενίζουμε εκ νέου τον χρόνο.)

Για να έχει το κύκλωμα L_1C_2 μέγιστη δυνατή ενέργεια θα πρέπει τα δύο στοιχεία πηνίο (1) και πυκνωτής (2) να έχουν αποθηκευμένη όλη την ενέργεια των κυκλωμάτων τους (L_1C_1, και L_2C_2 αντίστοιχα).

Δηλαδή πρέπει $i_1 = \pm I_1$ και $q_2 = \pm Q_2$ άρα:

$$i_1 = \pm I_1 \Rightarrow -I_1 \eta\mu\omega_1 t = \pm I_1 \Rightarrow \eta\mu\omega_1 t = \pm 1 \Rightarrow \omega_1 t = \frac{(2\kappa+1)\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{(2\kappa+1)\pi}{2\cdot 1,25\cdot 10^4} \Rightarrow \mathbf{t = \frac{(2\kappa+1)4\pi}{10}\cdot 10^{-4}\,s}$$

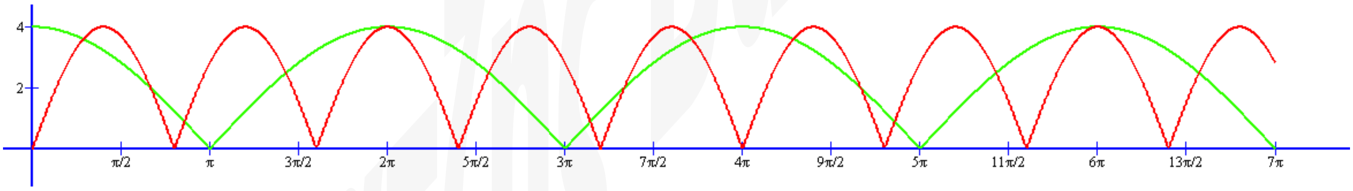
Άρα $t = (0{,}4\pi,\ 1{,}2\pi,\ 2\pi,\ 2{,}8\pi,\ ...)\cdot 10^{-4}$ s

$$q_2 = \pm Q_2 \Rightarrow Q_2 \sigma\upsilon\nu\omega_2 t = \pm Q_2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega_2 t = \pm 1 \Rightarrow \omega_2 t = \nu\pi \Rightarrow \mathbf{t = 2\nu\pi\cdot 10^{-4}\,s}$$

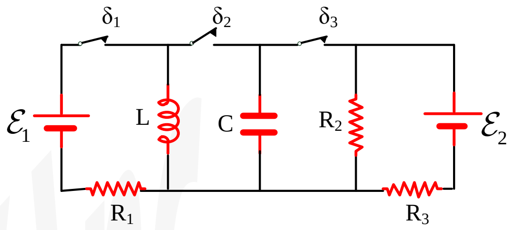
Άρα $t = (2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ ...)\cdot 10^{-4}$ s

Όπως βλέπουμε πρώτη φορά πετυχαίνουμε ταυτόχρονα μέγιστο την χρονική στιγμή **$t = 2\pi\cdot 10^{-4}$ s**.

Επαλήθευση από τα διαγράμματα στο Graph



Βλέπουμε πως η επόμενη χρονική στιγμή που θα συμβεί το ίδιο φαινόμενο είναι η $t = 6\pi\cdot 10^{-4}$ s.



4. Στο διπλανό κύκλωμα τα στοιχεία που φαίνονται έχουν τιμές $\mathcal{E}_1 = 10\sqrt{3}$ V, $\mathcal{E}_2 = 25$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, L = 2 mH, C = 5 μF. Οι δύο πηγές είναι ιδανικές και οι αγωγοί σύνδεσης είναι μηδενικής αντίστασης ενώ το κύκλωμα LC θεωρούμε ότι δεν ακτινοβολεί κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του. Αφού έχει σταθεροποιηθεί το ρεύμα στα δύο κυκλώματα ανοίγουμε τους διακόπτες δ_1 και δ_3 ενώ ταυτόχρονα κλείνουμε τον δ_2 χωρίς να συμβεί κάποια απώλεια ενέργειας. Αυτή τη στιγμή την θεωρούμε ως t = 0, για τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις που θα ακολουθήσουν.

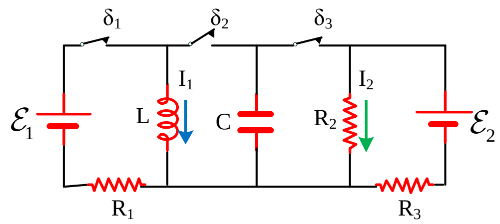
α. Να βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο και τον πυκνωτή πριν την αλλαγή των διακοπτών

β. Να γράψετε τις χρονοεξισώσεις ρεύματος και φορτίου θεωρώντας την φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή t = 0 ως θετική.

γ. Να εξηγήσετε αν ο πυκνωτής θα αρχίσει να φορτίζεται ή να εκφορτίζεται αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t = 0.

δ. Ποια αλλαγή πρέπει να κάνουμε στο αρχικό σύστημα ώστε η απάντηση σας να είναι αντίθετη από αυτή που δώσατε στο ερώτημα **γ.**

Λύση



α. Στο σχήμα φαίνονται τα ρεύματα πριν ανοίξουν οι διακόπτες δ_1, δ_3. Οι τιμές αυτών είναι: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}_1}{R_1} \Rightarrow \mathbf{I_1 = \sqrt{3}\,A}$ και στο άλλο κύκλωμα $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_3} \Rightarrow \mathbf{I_2 = 2{,}5\,A}$.

Ο πυκνωτής είναι παράλληλα συνδεδεμένος με τον αντιστάτη R_2, συνεπώς έχουν κοινή τάση.

$$V_C = V_{R_2} = I_2 R_2 \Rightarrow V_C = 20\,V$$

Άρα για το πηνίο $U_B = \dfrac{1}{2} L I_1^2 \Rightarrow U_B = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \Rightarrow \mathbf{U_B = 3 \cdot 10^{-3}\ J}$

και για τον πυκνωτή $U_E = \dfrac{1}{2} C V_C^2 \Rightarrow U_B = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 400 \Rightarrow \mathbf{U_E = 10^{-3}\ J}$

β. Εφόσον την χρονική στιγμή t = 0 το ρεύμα δεν είναι μηδέν το κύκλωμα έχει αρχική φάση.

Η ενέργεια των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι $E = U_B + U_E \Rightarrow \mathbf{E = 4\cdot 10^{-3}\ J}$

Το μέγιστο ρεύμα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι: $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2E}{L}} \Rightarrow \mathbf{I = 2\,A}$

και το πλάτος του φορτίου: $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow Q = \sqrt{2EC} \Rightarrow \mathbf{Q = 2\cdot 10^{-4}\ C}$ και επίσης $I = \omega Q \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^4}$ **rad/s**

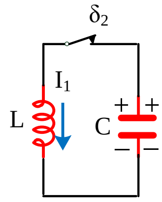
Για t = 0: $i = I_1 \Rightarrow -I\eta\mu\varphi_0 = I_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\varphi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}\\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}\end{array}\right\} \xrightarrow{0\le\varphi_0\le 2\pi} \begin{array}{l}\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}\,\text{rad}\\ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}\,\text{rad}\end{array}$

Για t = 0 έχω q > 0, άρα $\begin{array}{l} q = Q\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3} > 0\\ q = Q\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} < 0\end{array}$ οπότε είναι $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}\,\text{rad}$

Οι αντίστοιχες χρονοεξισώσεις είναι: $q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{q = 2\cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu\left(10^4 t + \frac{5\pi}{3}\right)}$ **(S.I.)**

$i = -I\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i = -2\eta\mu\left(10^4 t + \frac{5\pi}{3}\right)}$ **(S.I.)**.

γ. Την στιγμή που δημιουργείται το κύκλωμα LC το ρεύμα και η πολικότητα στον πυκνωτή είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Βλέπουμε ότι το ρεύμα κατευθύνεται από τον θετικό οπλισμό του πυκνωτή στον αρνητικό (ο πυκνωτής λειτουργεί ως πηγή), άρα εκφορτίζεται.



Σημείωση: Η φορά του ρεύματος παραμένει ως έχει λόγω της αυτεπαγωγής.

δ. Παραπάνω βλέπουμε ότι ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Για να είχαμε φόρτιση μετά την t = 0 θα έπρεπε ή το ρεύμα αρχικά να έχει αντίθετη φορά άρα πρέπει να αντιστρέψουμε την πολικότητα της πηγής $\mathcal{E}_1$ και διατηρήσουμε την πολικότητα της πηγής $\mathcal{E}_2$ ως έχει, ή να διατηρήσουμε την πολικότητα της $\mathcal{E}_1$ ως έχει και να αντιστρέψουμε την πολικότητα της $\mathcal{E}_2$ ώστε και ο πυκνωτής ν' αποκτήσει αρχικά αντίστροφη πολικότητα.