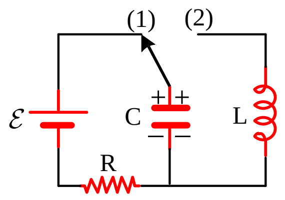
ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ ΠΗΓΗ



1. Στο διπλανό κύκλωμα η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E} = 100$ V και ο διακόπτης είναι αρχικά στη θέση 1. Κάποια χρονική στιγμή μεταφέρουμε το διακόπτη από τη θέση 1 στη θέση 2 και αρχίζουν οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Από τη στιγμή που μεταφέραμε το διακόπτη στη θέση 2 και για τα επόμενα $\pi\cdot 10^{-3}$ sec η ένταση του ρεύματος διατηρεί την κατεύθυνση της σταθερή. Η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι 200 A/s.

α. να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης

β. να βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή

γ. να γράψετε την εξίσωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε σχέση με την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος και να την σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες.

δ. να κάνετε την γραφική παράσταση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε σχέση με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή.

Λύση

α. Η ένταση του ρεύματος διατηρείται σταθερή μέχρι τη στιγμή που αυτό μηδενίζεται άρα

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi \cdot 10^{-3}\ s}$$

β. Η τάση του πυκνωτή αρχικά είναι ίση με την ΗΕΔ της πηγής λόγω παράλληλης σύνδεσης.

$\mathcal{E} = V_{max} \Rightarrow \mathbf{V = 100\ V}$.

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^3\ \dfrac{rad}{s}}$

Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος- υπολογίζεται από τη σχέση:

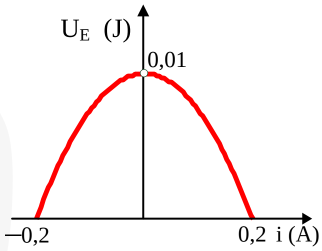
$$V_L = V_C \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} \Rightarrow \mathbf{\frac{di}{dt} = -\boldsymbol{\omega}^2 q}$$ και η μέγιστη τιμή είναι: $$\left.\frac{di}{dt}\right|_{max} = \omega^2 Q \Rightarrow 200 = 10^6 Q \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q = 2\cdot 10^{-4}\ C}$$

Επίσης έχουμε $C = \dfrac{Q}{V_{max}} \Rightarrow C = \dfrac{2\cdot 10^{-4}}{100} \Rightarrow \mathbf{C = 2\cdot 10^{-6}\ F}$

γ. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου συνδέεται έμμεσα με την ένταση του ηλεκτρικού μέσω της Α.Δ.Ε. για την ηλεκτρική ταλάντωση. $E = U_B + U_E \Rightarrow U_E = E - \frac{1}{2}Li^2$ (1)

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{4\cdot 10^{-8}}{2\cdot 10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E = 10^{-2}\ J}$$

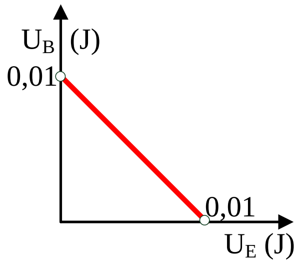


Επίσης έχουμε $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2} \Rightarrow L = \frac{1}{2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{6}} \Rightarrow \mathbf{L = 0,5\,H}$

Άρα από την (1) παίρνουμε: $\mathbf{U_E = 0,01 - 0,25\cdot i^2}$ **(S.I.)** με $-0,2\ A \le i \le 0,2\ A$

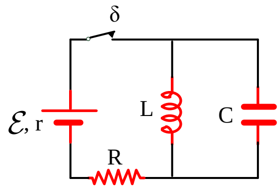
δ. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου και η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή συνδέονται μέσω της Α.Δ.Ε. για την ηλεκτρική ταλάντωση.

$E = U_B + U_E \Rightarrow U_B = E - U_E \Rightarrow \mathbf{U_B = 0,01 - U_E}$ **(S.I.)**



Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ΠΗΝΙΟ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ ΠΗΓΗ



2. Το πηνίο του διπλανού κυκλώματος είναι ιδανικό και έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 2 mH, η πηγή έχει ΗΕΔ $\mathcal{E}$ = 50 V και εσωτερική αντίσταση r = 1 Ω και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C = 20 μF. Ο αντιστάτης έχει αντίσταση R = 9 Ω. Αρχικά ο διακόπτης βρίσκεται στη είναι κλειστός και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί. Τη χρονική στιγμή t = 0 ανοίγουμε το διακόπτη (δ) και το ιδανικό κύκλωμα που περιλαμβάνει το πηνίο και τον πυκνωτή αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις,

α. Να εξηγήσετε γιατί ο πυκνωτής δεν φορτίζεται πριν το άνοιγμα του διακόπτη

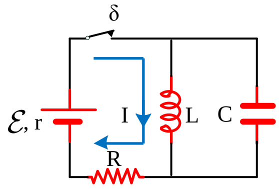
β. Να υπολογίσετε την ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης που εκτελεί το κύκλωμα LC.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα LC καθώς και τη χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή, θεωρώντας θετική τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο πριν ανοίξουμε το διακόπτη.

δ. Αν μπορούμε να μεταβάλλουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου, να βρείτε μέχρι ποια τιμή μπορούμε να τον αυξήσουμε, γνωρίζοντας ότι η τάση των οπλισμών του πυκνωτή δεν πρέπει να υπερβεί τα 60 V. Τα καλώδια σύνδεσης έχουν αμελητέα αντίσταση.

Λύση

α. Όταν ο διακόπτης είναι κλειστός το πηνίο και ο πυκνωτής είναι παράλληλα συνδεμένα και έχουν κοινή τάση. Το ρεύμα όμως έχει σταθεροποιηθεί όποτε το πηνίο δεν εμφανίζει αυτεπαγωγή και επειδή είναι ιδανικό δεν έχει ωμική αντίσταση (στην ουσία έχουμε βραχυκύκλωμα) άρα $V_L = 0 \Rightarrow \mathbf{V_C = 0}$.



β. Αρχικά ο διακόπτης είναι κλειστός και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί στην τιμή:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{50}{10} \Rightarrow \mathbf{I = 5\,A}$$

Η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_{B,max} = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \Rightarrow \mathbf{U_{B,max} = 25 \cdot 10^{-3}\ J}$$

Από τη χρονική στιγμή t = 0 που ανοίγουμε το διακόπτη και μετά, το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος LC ισούται με την ενέργεια που είχε αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου πριν το άνοιγμα του διακόπτη (αφού ο πυκνωτής τη Στιγμή t = 0 είναι αφόρτιστος). Επομένως: $E = U_{B,max} \Rightarrow \mathbf{E = 25 \cdot 10^{-3}\ J}$

γ. Τη χρονική στιγμή t = 0 που ανοίγουμε το διακόπτη η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο ισούται με 5 A.

Με το άνοιγμα του διακόπτη το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, οπότε αμέσως μετά τη στιγμή t = 0 η ένταση του ρεύματος αρχίζει να ελαττώνεται μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται. Το αρχικό ρεύμα δηλαδή είναι και το μέγιστο ρεύμα των ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

Επειδή θεωρούμε ως θετική τη φορά του ρεύματος πριν το άνοιγμα του διακόπτη, τη χρονική στιγμή t = 0 είναι: $i = I \Rightarrow -I\eta\mu\varphi_0 = I \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 \le 2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}\ \mathbf{rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα ω της ηλεκτρικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5000\,\frac{rad}{s}}$$

Επομένως: $i = -I\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i = -5\eta\mu(5000t + \frac{3\pi}{2})\ \ (S.I.)}$

Για το μέγιστο φορτίο έχουμε: $I = \omega Q \Rightarrow Q = \frac{I}{\omega} \Rightarrow Q = \frac{5}{5000} \Rightarrow \mathbf{Q = 10^{-3}\ C}$

Επομένως: $q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{q = 10^{-3}\sigma\upsilon\nu(5000t + \frac{3\pi}{2})\ \ (S.I.)}$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε: $\mathbf{i = 5\sigma\upsilon\nu 5000t\ \ (S.I.)}$ και $\mathbf{q = 10^{-3}\eta\mu 5000t\ \ (S.I.)}$

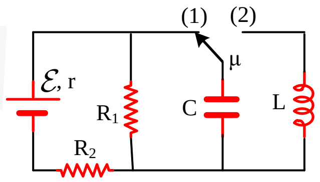
δ. Ισχύει: $U_{B.max} = U_{E,max} \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV_{max}^2 \Rightarrow V_{max}^2 = \frac{LI^2}{C}$

Πρέπει $V_{max} \le 60\,Volt \Rightarrow V_{max}^2 \le 3600\,Volt^2 \Rightarrow \frac{LI^2}{C} \le 3600\,Volt^2 \Rightarrow \mathbf{L \le 2,88 \cdot 10^{-3}\ H}$

Άρα $\mathbf{L_{max} = 2,88 \cdot 10^{-3}\ H}$.

ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

3. Για το κύκλωμα του επόμενου σχήματος δίνονται τα μεγέθη R_2 = 28 Ω, C = 2 μF, R_1 = 20 Ω, $\mathcal{E}$ = 100 V και r = 2 Ω. Αρχικά ο μεταγωγός (μ) είναι στη θέση (1) και ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος. Κάποια χρονική στιγμή που τη θεωρούμε ως t = 0 μετακινούμε ακαριαία το μεταγωγό στη θέση (2), οπότε το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα ω = 10^4 rad/s.



α. Να υπολογίσετε το φορτίο που αποθηκεύεται αρχικά στον πυκνωτή

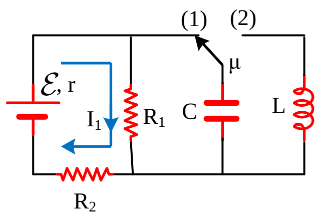
β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της ενέργειας που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου,

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της τάσης από αυτεπαγωγή μετά την έναρξη της ηλεκτρικής ταλάντωσης και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

δ. Να υπολογίσετε το πηλίκο της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή προς την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου τη χρονική στιγμή t_1 = T/3, όπου T η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης.

Λύση

α. Όταν ο μεταγωγός είναι στη θέση (1), το τμήμα του κυκλώματος που περιλαμβάνει την πηγή και τους αντιστάτες R_1 και R_2 διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης που ισούται με:



$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} \Rightarrow I_1 = \frac{100}{20+28+2} \Rightarrow \mathbf{I_1 = 2\,A}$$

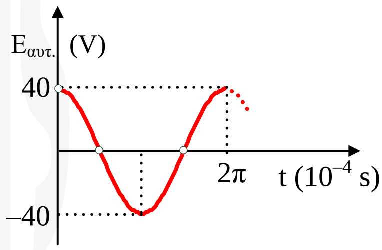
Ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος στα άκρα του αντιστάτη R_1. Αυτό σημαίνει ότι ο πυκνωτής και ο αντιστάτης R_1 έχουν την ίδια τάση. Δηλαδή: $V_{max} = V_{R_1} = I_1 R_1 = 2\cdot 20 \Rightarrow \mathbf{V_{max} = 40V}$

Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα. Το φορτίο που έχει αποθηκευτεί σ' αυτόν υπολογίζεται από τον τύπο: $C = \frac{Q}{V_{max}} \Rightarrow Q = CV_{max} \Rightarrow Q = 2\cdot 10^{-6}\cdot 40 \Rightarrow \mathbf{Q = 8\cdot 10^{-5}\,C}$

β. Από τη χρονική στιγμή t = 0 που μεταφέρουμε το μεταγωγό στη θέση (2) το κύκλωμα LC αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Επειδή τη στιγμή t = 0 το πηνίο δε διαρρέεται από ρεύμα και συνεπώς δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια, συμπεραίνουμε πως η ενέργεια που είχε αποθηκευτεί στον πυκνωτή ισούται με την ολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Επομένως, κατά τη διάρκεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι:

$$U_{B,max} = U_{E,max} \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}2\cdot 10^{-6}\cdot 1600 \Rightarrow \mathbf{U_{B,max} = 16\cdot 10^{-4}\ J}$$

γ. Η τάση από αυτεπαγωγή υπολογίζεται από τη σχέση:



$$E_{αυτ.} = V_L = V_C = \frac{q}{C} = \frac{Q}{C}συνωt \Rightarrow E_{αυτ.} = V_{max}συνωt \Rightarrow$$

$$\mathbf{E_{αυτ.} = 40συν10^4 t\ \ (S.I.)}$$

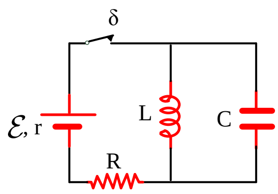
Η περίοδος ισούται με $ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow \mathbf{T = 2π\cdot 10^{-4}\ s}$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα,

δ. Το πηλίκο των ζητούμενων ενεργειών είναι:

$$\frac{U_E}{U_B} = \frac{Eσυν^2ωt}{Eημ^2ωt} = σφ^2ωt = σφ^2\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{3} = σφ^2\frac{2π}{3} \Rightarrow \frac{U_E}{U_B} = \frac{1}{3}$$

ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ ΔΙΑΚΟΠΤΗ ΠΡΙΝ ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΡΕΥΜΑ.



4. Στο διπλανό κύκλωμα έχουμε πηγή με ΗΕΔ $\mathcal{E}$ = 90 V, r = 0 αντιστάτη με αντίσταση R = 10 Ω. Το πηνίο (L = 2 mH) και ο πυκνωτής είναι ιδανικά στοιχεία και τα σύρματα δεν παρουσιάζουν καμία αντίσταση. Κλείνουμε τον διακόπτη και το ρεύμα αρχίζει να αυξάνεται. Την στιγμή που ο ρυθμός αποθήκευσης στο πηνίο είναι διπλάσιος από το ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον αντιστάτη ανοίγουμε τον διακόπτη οπότε αρχίζουν οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Ως χρονική στιγμή μηδέν για τις ηλεκτρικές ταλαντώσεις θεωρούμε τη στιγμή που ανοίγουμε τον διακόπτη και θετική τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη στιγμή έναρξης των ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Από τη χρονική στιγμή που ανοίξαμε το διακόπτη, ο χρόνος που χρειάζεται για να μηδενιστεί η τάση από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου είναι $\Delta t = \pi \cdot 10^{-4}$ s.

α. να βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο τη στιγμή της αλλαγής του διακόπτη

β. να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα LC

γ. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος την χρονική στιγμή $t_1 = 5\pi \cdot 10^{-5}$ s

Λύση

α. Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο πηνίο είναι η ισχύς αυτού. Η ισχύς που παρέχει η πηγή κατανέμεται στα στοιχεία του κυκλώματος και ισχύει:

$$P_{\pi\eta\gamma.} = P_R + P_L \Rightarrow P_{\pi\eta\gamma.} = P_R + 2P_R \Rightarrow \mathcal{E} \cdot I = 3I^2R \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{3R} \Rightarrow I = \frac{90}{30} \Rightarrow \mathbf{I = 3\,A}$$

Άρα η αποθηκευμένη ενέργεια $U_{B,max} = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \Rightarrow \mathbf{U_{B,max} = 9 \cdot 10^{-3}\,J}$

β. Τη στιγμή έναρξης των ταλαντώσεων το φορτίο στο πυκνωτή είναι q = 0 και το ρεύμα μέγιστο, άρα υπάρχει αρχική φάση. $i = I \Rightarrow -I\eta\mu\varphi_0 = I \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 \le 2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}\,\mathbf{rad}$

Τάση από αυτεπαγωγή έχουμε όταν ο πυκνωτής έχει φορτίο αφού κάθε στιγμή ισχύει $E_{\alpha\upsilon\tau.} = V_C$. Την στιγμή t = 0 το φορτίο είναι q = 0 άρα και $E_{\alpha\upsilon\tau.} = 0$, το φορτίο θα ξαναγίνει μηδέν μετά από χρόνο T/2 όπου T η περίοδος της ταλάντωσης του κυκλώματος LC. Άρα η χρονική διάρκεια που δίνεται είναι ίση με T/2.

$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \pi \cdot 10^{-4} = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi \cdot 10^{-4}\ s}$ άρα και $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^4\ \frac{rad}{s}}$

Επομένως η χρονοεξίσωση της έντασης του ρεύματος είναι:

$i = -I\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{i = -3\eta\mu(10^4 t + \frac{3\pi}{2})\ (S.I.)}$

γ. Σε ένα κύκλωμα LC ισχύει: $V_L = V_C \Rightarrow -L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega^2 q \quad (1)$

Το μέγιστο φορτίο είναι $I = \omega Q \Rightarrow Q = \frac{I}{\omega} \Rightarrow \mathbf{Q = 3 \cdot 10^{-4}\ C}$

$q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow q = 3 \cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(10^4 t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow q = 3 \cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(10^4 \cdot 5\pi \cdot 10^{-5} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow$

$q = 3 \cdot 10^{-4}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \mathbf{q = 3 \cdot 10^{-4}\ C}$ και από την (1) $\Rightarrow \frac{di}{dt} = -10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \mathbf{\frac{di}{dt} = -3 \cdot 10^4\ \frac{A}{s}}$