ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Εισαγωγικές ασκήσεις στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις

1. Ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις και η χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση $q = 2\cdot10^{-6}$συν(10^4t) (S.I.). Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου ισούται με L = 2 mH.

α. να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα

β. να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

γ. να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται ο πυκνωτής για να εκφορτιστεί από τη στιγμή που είναι πλήρως φορτισμένος.

Λύση

α. Η χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή είναι της μορφής: q = Qσυνωt

Από τη θεωρητική μορφή και την δοθείσα προκύπτει ότι: $Q = 2\cdot10^{-6}$ C   και $\omega = 10^4$ rad/s

Αφού η χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή είναι της μορφής q = Qσυνωt, η χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι της μορφής: i = –Iημωt

Άρα $I = \omega Q \Rightarrow \mathbf{I = 2\cdot10^{-2}\ A}$

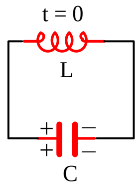
Συνεπώς η ζητούμενη χρονική εξίσωση είναι η: **i = –0,02ημ10^4t   (S.I.)**

β. Η γωνιακή συχνότητα ω, ο συντελεστής αυτεπαγωγής L του πηνίου και η χωρητικότητα C του πυκνωτή συνδέονται με τη σχέση: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} \Rightarrow C = \frac{1}{2\cdot10^{-3}\cdot10^{8}} \Rightarrow \mathbf{C = 5\cdot10^{-6}\ F}$

γ. Ο πυκνωτής χρειάζεται χρόνο $\Delta t = \frac{T}{4}$ για να εκφορτιστεί πλήρως.

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\cdot10^{-4}\ s$ άρα $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \frac{\pi\cdot10^{-4}}{2}\ s}$

2. Για το ιδανικό κύκλωμα LC του διπλανού σχήματος δίνονται L = 10 mH και C = 1 μF. Τη χρονική στιγμή t = 0 το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο και ισούται με + $4 \cdot 10^{-6}$ C, με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα.



α. Να γράψετε τις εξισώσεις q = f(t) και i = f(t) και να σχεδιάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

β. Να υπολογίσετε την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που εμφανίζεται στο πηνίο τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{3\pi \cdot 10^{-4}}{4}$ s και να βρείτε την πολικότητα της την ίδια χρονική στιγμή.

γ. Ποιο το μέγιστο χρονικό διάστημα που η ένταση του ρεύματος έχει σταθερή κατεύθυνση κατά την διάρκεια των ταλαντώσεων.

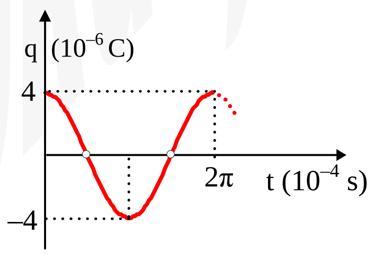
Λύση

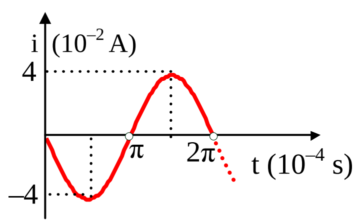
α. Επειδή τη χρονική στιγμή t = 0 το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο θετικό (q = + Q), η χρονική εξίσωση του φορτίου έχει τη μορφή: q = Qσυνωt ενώ για το ρεύμα ισχύει: i = –Iημωt

Η γωνιακή συχνότητα ω υπολογίζεται από τη σχέση $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \dfrac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-6}}} \Rightarrow \mathbf{\omega = 10^4 \dfrac{rad}{s}}$.

Το μέγιστο ρεύμα είναι: $I = \omega Q \Rightarrow \mathbf{I = 4 \cdot 10^{-2}\ A}$

Οι ζητούμενες χρονοεξισώσεις είναι: **$q = 4 \cdot 10^{-6}$συν10^4t (S.I)** και **$i = -4 \cdot 10^{-2}$ημ10^4t (S.I.)**



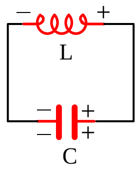


β. Αφού το πηνίο είναι ιδανικό και έχει κοινά άκρα με τον πυκνωτή, η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο πηνίο ισούται κάθε στιγμή με την τάση στα άκρα του πυκνωτή.

Επομένως για την στιγμή t_1 έχουμε: $q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$συν$(10^4 \dfrac{3\pi}{4} \cdot 10^{-4}) \Rightarrow \mathbf{q_1 = -2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} C}$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή και επομένως η $E_{αυτ}$ είναι:

$$E_{αυτ} = V_c = \frac{q_1}{C} = \frac{-2\sqrt{2} \cdot 10^{-6}}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E_{αυτ} = -2\sqrt{2}\ Volt}$$

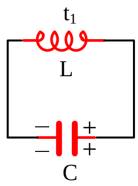


Όπως έχουμε δει στην θεωρία αρνητική τάση στα άκρα του πυκνωτή σημαίνει ότι ο πυκνωτής έχει αντίθετη πολικότητα απ' αυτή που είχε την χρονική στιγμή t = 0. Άρα η πολικότητα είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

γ. Το ρεύμα διατηρεί την κατεύθυνση του για χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \cdot 10^{-4}\,\text{s} \quad \text{άρα} \;\; \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \pi \cdot 10^{-4}\,s}$$

3. Το ιδανικό κύκλωμα LC του διπλανού σχήματος εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο $T = 8\pi\cdot10^{-3}$ s. Ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 2\ \mu F$ και το φορτίο του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{4\pi\cdot10^{-3}}{3}$ s το φορτίο του πυκνωτή ισούται με $q_1 = -10^{-4}$ C.



α. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του φορτίου του πυκνωτή,

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο

γ. Να υπολογίσετε την τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{2\pi\cdot10^{-3}}{3}$ s και να εξετάσετε αν τη χρονική αυτή στιγμή ο πυκνωτής φορτίζεται ή εκφορτίζεται.

Λύση

α. Η γωνιακή συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{8\pi\cdot10^{-4}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \frac{1}{4}\cdot10^{4}\ \frac{rad}{s}}$$

Τη μέγιστη τιμή του φορτίου μπορούμε να την υπολογίσουμε από τη χρονοεξίσωση $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$,

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow -10^{-4} = Q\sigma\upsilon\nu(\frac{1}{4}\cdot10^{4}\cdot\frac{4\pi\cdot10^{-3}}{3}) \Rightarrow -10^{-4} = Q\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi\cdot10}{3}) \Rightarrow -10^{-4} = Q\sigma\upsilon\nu(2\pi+\frac{4\pi}{3})$$

$\mathbf{Q = 2\cdot10^{-4}\ C}$

β. Επειδή η χρονική εξίσωση του φορτίου είναι της μορφής $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$, συμπεραίνουμε πως η χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος είναι της μορφής: $i = -I\eta\mu\omega t$

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $I = \omega Q \Rightarrow \mathbf{I = 0,5\ A}$ άρα

$$\mathbf{i = -0{,}5\eta\mu\frac{10^{4}}{4}t\ \ (S.I.)}$$

γ. Για να βρούμε την τάση του πυκνωτή τη ζητούμενη χρονική στιγμή t_2 αρκεί να βρούμε το φορτίο τη χρονική αυτή στιγμή.

$$q_2 = Q\sigma\upsilon\nu\omega t_2 \Rightarrow q_2 = 2\cdot10^{-4}\sigma\upsilon\nu(\frac{1}{4}\cdot10^{4}\cdot\frac{2\pi\cdot10^{-3}}{3}) \Rightarrow q_2 = 2\cdot10^{-4}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi\cdot10}{6}) \Rightarrow q_2 = 10^{-4}\ C$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι: $V_2 = \dfrac{q_2}{C} \Rightarrow V_2 = \dfrac{10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{V_2 = 50\,V}$.

Για να βρούμε τώρα αν ο πυκνωτής τη χρονική αυτή στιγμή φορτίζεται η εκφορτίζεται ένας τρόπος είναι να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και αν προκύψει θετική τιμή τότε ο πυκνωτής φορτίζεται ενώ διαφορετικά εκφορτίζεται.

Η ένταση του ρεύματος αυτή τη στιγμή είναι:

$$i_2 = -0,5\eta\mu\frac{10^4}{4}t_2 \Rightarrow i_2 = -0,5\eta\mu\left(\frac{10^4}{4}\cdot\frac{2\pi\cdot 10^{-3}}{3}\right) = -0,5\eta\mu\frac{10\pi}{6} = -0,5\eta\mu\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{i_2 = 0,25\sqrt{3}\,A}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή είναι:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_C = V_2 \cdot i_2 = 50 \cdot 0,25\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{\frac{dU_E}{dt} = +12,5\sqrt{3}\,\frac{J}{s}}$$

Οπότε ο πυκνωτής φορτίζεται.

4. Ιδανικό κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις συχνότητας $f = \frac{10^4}{\pi}$ Hz και τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με $+6\cdot10^{-2}$ A, ενώ το φορτίο του πυκνωτή την ίδια χρονική στιγμή ισούται με $+ 4\cdot10^{-6}$ C. Η τάση του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $V_c = 20\text{συν}\omega t$ (V_c σε V).

α. Να υπολογίσετε το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή,

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου καθώς και την εξίσωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ($U_B = f(i)$, $U_E = f(i)$) και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Λύση

α. Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2\cdot10^4\ \frac{rad}{s}}$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ηλεκτρική ταλάντωση:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega^2} \quad (1)$$

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \Rightarrow Q^2 = LCi^2 + q^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{i^2}{\omega^2} + q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{i^2}{\omega^2} + q^2} \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{36\cdot10^{-4}}{4\cdot10^8} + 16\cdot10^{-12}} \Rightarrow \mathbf{Q = 5\cdot10^{-6}\,C}$$

β. Για το πλάτος I της έντασης του ρεύματος έχουμε: $I = \omega Q \Rightarrow \mathbf{I = 0{,}1\ A}$

Συνεπώς: $\mathbf{i = -0{,}1\eta\mu(2\cdot10^4 t)}$ **(S.I.)**

γ. Η εξίσωση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος είναι η: $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ με $-0{,}1\ A < i < 0{,}1\ A$.

Από την εξίσωση της τάσης προκύπτει ότι $\mathbf{V_{max} = 20\ V}$

επίσης $C = \dfrac{Q}{V_{max}} \Rightarrow C = \dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{20} \Rightarrow \mathbf{C = 2,5 \cdot 10^{-7}\ F}$

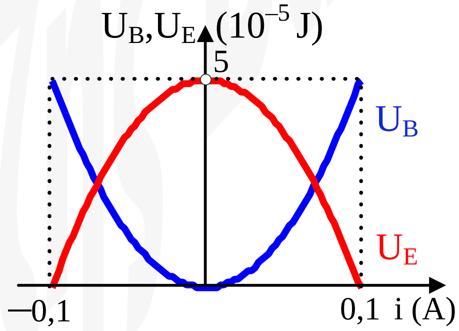
Από την (1) $\Rightarrow L = \dfrac{1}{C\omega^2} = \dfrac{1}{2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{8}} \Rightarrow \mathbf{L = 10^{-2}\ H}$ Άρα $\mathbf{U_B = 5 \cdot 10^{-3} i^2}$ **(S.I.)**

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} \Rightarrow E = \dfrac{1}{2}\dfrac{25 \cdot 10^{-12}}{2,5 \cdot 10^{-7}} \Rightarrow \mathbf{E = 5 \cdot 10^{-5}\ J}$

Για να βρούμε την εξίσωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με την ένταση του ρεύματος, χρησιμοποιούμε την Α.Δ.Ε. για την ηλεκτρική ταλάντωση:

$E = U_B + U_E \Rightarrow \mathbf{U_E = 5 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-3} i^2}$ **(S.I.)**

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα.



5. Ένα ιδανικό κύκλωμα αποτελούμενο από έναν πυκνωτή και ένα πηνίο συνδεδεμένων με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις ενέργειας $E = 2 \cdot 10^{-2}$ J. Κάποια χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με μηδέν και το φορτίο του πυκνωτή ισούται με $2 \cdot 10^{-4}$ C, ενώ μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_2 η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ισούται με μηδέν και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με + 0,2 A. Στη χρονική διάρκεια αμέσως μετά τη στιγμή t_1 και μέχρι τη στιγμή t_2 δε συμβαίνει μηδενισμός της έντασης του ρεύματος,

α. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$.

β. Να υπολογίσετε την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που εμφανίζεται στο πηνίο μια χρονική στιγμή t′ που η ένταση του ρεύματος το οποίο διαρρέει το κύκλωμα ισούται με –0,1 A.

γ. Αν δίνεται ότι $t_1 = 0$, να γράψετε τη χρονική εξίσωση της τάσης του πυκνωτή.

Λύση

α. Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση του ρεύματος ισούται με μηδέν, οπότε το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο. Άρα τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\mathbf{q = Q = 2 \cdot 10^{-4}\ C}$

Τη μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_2 η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t_2 ισούται με μηδέν, οπότε την ίδια στιγμή η ένταση του ρεύματος είναι μέγιστη. Άρα τη στιγμή t_2 είναι: $\mathbf{i = I = 0{,}2\ A}$

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι $i_1 = 0$, ενώ τη χρονική στιγμή t_2 είναι $i_2 = +I$. Αφού στη χρονική διάρκεια αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 και μέχρι τη στιγμή t_2 δε συμβαίνει μηδενισμός της έντασης του ρεύματος, η ζητούμενη χρονική διάρκεια ισούται με $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4}$. Άρα: $\Delta t = \frac{T}{4}$

Ισχύει: $I = \omega Q \Rightarrow \omega = \frac{I}{Q} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^3\ \frac{rad}{s}}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi \cdot 10^{-3}\ s}$

Συνεπώς: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi \cdot 10^{-3}}{2}$ s

β. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που εμφανίζεται στο πηνίο ισούται με την τάση στα άκρα του πυκνωτή. Συνεπώς για τη χρονική στιγμή t′ είναι: $E_{αυτ} = V_c = \frac{q}{C}$

Για να βρούμε το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t′ που η ένταση του ρεύματος ισούται με i = –0,1 A, χρησιμοποιούμε την Α.Δ.Ε. για την ηλεκτρική ταλάντωση:

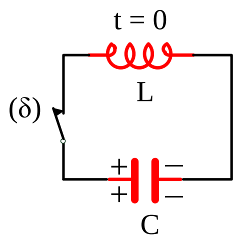
$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \Rightarrow Q^2 = LCi^2 + q^2 \Rightarrow q^2 = Q^2 - \frac{i^2}{\omega^2} \Rightarrow q = \pm\sqrt{4\cdot 10^{-8} - \frac{0{,}01}{10^6}} \Rightarrow \mathbf{q = \pm 10^{-4}\sqrt{3}\,C}$$

Επίσης ισχύει ότι: $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow C = \frac{Q^2}{2E} \Rightarrow C = \frac{4\cdot 10^{-8}}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}} \Rightarrow \mathbf{C = 10^{-6}\,F}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών προκύπτει: $E_{αυτ} = \frac{q}{C} \Rightarrow E_{αυτ} = \frac{\pm 10^{-4}\sqrt{3}}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E_{αυτ} = \pm 100\sqrt{3}\,V}$

γ. Τη στιγμή t = 0 είναι q = + Q = +10^{-4} C. Συνεπώς η χρονική εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή είναι της μορφής q = Qσυνωt ⇒ $\mathbf{q = 2\cdot 10^{-4}συν10^3t}$ **(S.I.)**

Επομένως $C = \frac{q}{V_c} \Rightarrow V_c = \frac{q}{C} \Rightarrow V_c = \frac{2\cdot 10^{-4}συν10^3 t}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{V_c = 200συν10^3 t}$ **(S.I.)**



6. Στο ιδανικό κύκλωμα LC του διπλανού σχήματος το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 10 mH. Αρχικά ο διακόπτης του κυκλώματος είναι ανοικτός και το φορτίο του πυκνωτή είναι ίσο με + $2\cdot10^{-4}$ C, με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi\cdot10^{-4}$ s ο πυκνωτής έχει ξανά μέγιστο φορτίο (κατ' απόλυτη τιμή), αλλά αντίθετης πολικότητας από αυτή που είχε τη χρονική στιγμή t = 0, και το φορτίο του στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ έχει μηδενιστεί μία φορά.

α. Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.

β. Να βρείτε το πηλίκο της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή προς την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου τις χρονικές στιγμές που το φορτίο του πυκνωτή ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής του.

γ. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Λύση

α. Τη χρονική στιγμή t = 0 το φορτίο του πυκνωτή είναι μέγιστο θετικό ($q = Q = 2\cdot10^{-4}$ C), ενώ τη χρονική στιγμή t_1 είναι μέγιστο αρνητικό ($q = -Q = -10^{-4}$ C, μιας και τη στιγμή t_1 ο πυκνωτής έχει αντίθετη πολικότητα από αυτή που είχε τη χρονική στιγμή t = 0). Αφού το φορτίο του πυκνωτή στη χρονική διάρκεια 0 $\rightarrow t_1$ έχει μηδενιστεί μόνο μία φορά, η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με $\frac{T}{2}$, όπου T η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης. Επομένως είναι: $t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi\cdot10^{-4}\ s}$

Όμως ισχύει: $T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2\cdot10^{-8}}{4\pi^2\cdot10^{-2}} \Rightarrow \mathbf{C = 10^{-6}\ F}$

β. Για το ζητούμενο πηλίκο έχουμε: $\frac{U_E}{U_B} = \frac{U_E}{E - U_E} = \frac{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} = \frac{q^2}{Q^2 - q^2} = \frac{\frac{Q^2}{4}}{Q^2 - \frac{Q^2}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

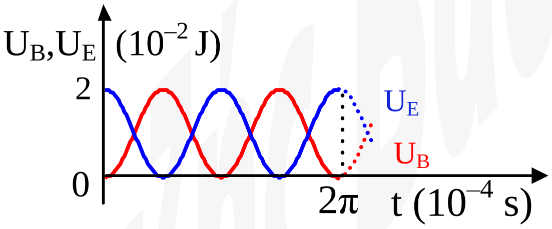
γ. Για να βρούμε τις χρονικές εξισώσεις της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου, πρέπει στις εξισώσεις να γνωρίζουμε την κυκλική συχνότητα και την ενέργεια της ταλάντωσης.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 10^{-4}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^4\ \frac{rad}{s}} \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{4 \cdot 10^{-8}}{10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E = 2 \cdot 10^{-2}\ J}$$

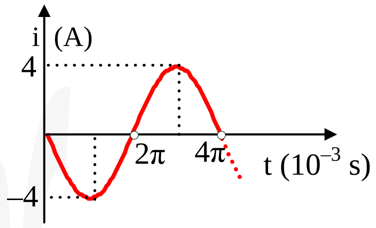
Οι εξισώσεις είναι: $U_E = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t \Rightarrow \mathbf{U_E = 2 \cdot 10^{-2} \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}^2 10^4 t}$ **(S.I.)** και

$U_B = E\eta\mu^2\omega t \Rightarrow \mathbf{U_B = 2 \cdot 10^{-2} \boldsymbol{\eta\mu}^2 10^4 t}$ **(S.I.)**

Παρακάτω φαίνονται και οι γραφικές παραστάσεις.



7. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της χρονικής εξίσωσης της έντασης του ρεύματος που διαρρέει ένα ιδανικό κύκλωμα LC. Ο πυκνωτής του κυκλώματος έχει χωρητικότητα C = 4 μF.



α. Να υπολογίσετε το φορτίο του πυκνωτή τις χρονικές στιγμές που η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι ίση με $i_1 = +2\sqrt{3}$ A.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων,

γ. Να υπολογίσετε τις τιμές του φορτίου του πυκνωτή που αντιστοιχούν στα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

Λύση

α. Από το διάγραμμα που δίνεται στην εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$I = 4$ A, $T = 4\pi\cdot 10^{-3}$ s, άρα και ω = 500 rad/s,

η χρονική εξίσωση της έντασης του ρεύματος είναι της μορφής i = –Iημωt.

Για να υπολογίσουμε το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή που η ένταση του ρεύματος είναι ίση με i_1, χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ηλεκτρική ταλάντωση. Είναι:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} \Rightarrow I^2 = i^2 + \frac{q^2}{LC} \Rightarrow I^2 = i^2 + \omega^2 q^2 \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{I^2 - i^2}}{\omega} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{16-12}}{500} \Rightarrow$$

$\mathbf{q = \pm 4\cdot 10^{-3}\ C}$

β. Το μέγιστο φορτίο είναι I = ωQ ⇒ $\mathbf{Q = 8\cdot 10^{-3}\ C}$ **και η ενέργεια της ταλάντωσης**

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{64\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-6}} \Rightarrow \mathbf{E = 8\,J}$$

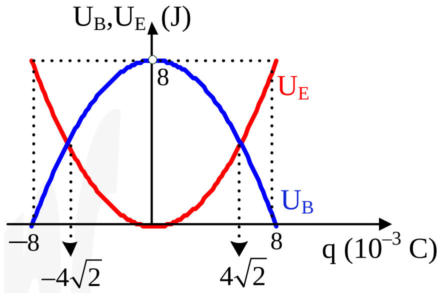
Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow \mathbf{U_E = 1,25\cdot 10^5 q^2}\ \text{(S.I.)} \quad \text{με } -8\cdot 10^{-3}\ \text{C} \le q \le 8\cdot 10^{-3}\ \text{C}$$

Η σχέση αυτή είναι της μορφής $y = αx^2$, επομένως η γραφική της παράσταση είναι παραβολή.

Για να γράψουμε την εξίσωση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου U_B σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή, χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ηλεκτρική ταλάντωση:

$$E = U_B + U_E \Rightarrow \mathbf{U_B = 8 - 1,25 \cdot 10^5 q^2 \ (S.I.)} \ \text{με} \ -8\cdot 10^{-3}\ C \le q \le 8\cdot 10^{-3}\ C$$

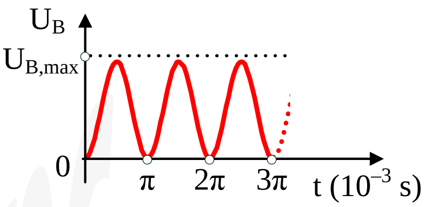


Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

γ. Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων U_E και U_B αντιστοιχούν σε δύο τιμές του φορτίου του πυκνωτή για τις οποίες ισχύει η σχέση $U_B = U_E$.

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε ότι κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$U_B = U_E \Rightarrow E - U_E = U_E \Rightarrow E = 2U_E \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 2\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow q = \pm\frac{Q}{\sqrt{2}} = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{q = \pm 4\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\ C}$$



8. Ένα ιδανικό κύκλωμα LC, που αποτελείται από πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, και πυκνωτή χωρητικότητας C = 4 μF, εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ενέργεια που απορροφά ο πυκνωτής σε κάθε χρονική διάρκεια από τη στιγμή που ξεκινά η φόρτιση του μέχρι τη στιγμή που φορτίζεται πλήρως ισούται με $24 \cdot 10^{-6}$ J.

α. Να γράψετε την εξίσωση της τάσης των οπλισμών του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο, αν γνωρίζετε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το φορτίο του πυκνωτή έχει θετική τιμή.

β. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή τις χρονικές στιγμές που η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου ισούται με $6 \cdot 10^{-6}$ J.

γ. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές στη διάρκεια της πρώτης περιόδου η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή ισούται με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου για πρώτη φορά μετά την t = 0.

δ. Να βρείτε το μέγιστο χρονικό διάστημα που οι οπλισμοί του πυκνωτή διατηρούν σταθερή την πολικότητα τους κατά την διάρκεια των ταλαντώσεων.

Λύση

α. Όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση της εκφώνησης, τη χρονική στιγμή t = 0 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με μηδέν, άρα και η ένταση του ρεύματος την ίδια στιγμή είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t = 0 το φορτίο του πυκνωτή έχει τη μέγιστη τιμή του, η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι θετική (δηλαδή την t = 0 είναι q = + Q).

Επειδή την t = 0 είναι q = + Q, η χρονική εξίσωση του φορτίου q του πυκνωτή είναι της μορφής:

q = Qσυνωt

Από τη γραφική παράσταση της εκφώνησης φαίνεται ότι η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου μετά την t = 0 μηδενίζεται για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή $\pi \cdot 10^{-3}$ s. Επειδή η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου (ή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου) ισούται με T/2 (όπου T η περίοδος της ταλάντωσης), συμπεραίνουμε ότι: $T = 2\pi \cdot 10^{-3}$ s, άρα και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10^3 \ \frac{rad}{s}}$.

Επίσης ισχύει: $U_{B,max} = U_{E,max} \Rightarrow U_{B,max} = \frac{1}{2}CV_{max}^2 \Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{2U_{B,max}}{C}} \Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot 24\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-6}}} \Rightarrow$

$\mathbf{V_{max} = 2\sqrt{3}\,V}$

Επομένως η χρονική εξίσωση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι της μορφής:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}\text{συν}\omega t \Rightarrow V = V_{max}\text{συν}\omega t \Rightarrow \mathbf{V = 2\sqrt{3}\text{συν}1000t \quad (S.I.)}$$

β. Όταν $U_B = 6\cdot 10^{-6}$ J τότε $U_E = 18\cdot 10^{-6}$ J οπότε έχουμε: $U_E = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow V = \pm\sqrt{\frac{2U_E}{C}} \Rightarrow V = \pm\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-6}}} \Rightarrow$

$\mathbf{V = \pm 3\,V}$

Η τιμή της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στο ιδανικό πηνίο του κυκλώματος LC μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο: $|\mathbf{E_{αυτ}}| = |\mathbf{V}| = \mathbf{3\,V}$

γ. Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη χρονική στιγμή, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ηλεκτρική ταλάντωση. Είναι: $U_E = U_B \Rightarrow E - U_B = U_B \Rightarrow E = 2U_B \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = 2\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i = \pm\frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$-I\text{ημ}\omega t = \pm\frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ημ}\omega t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1000t = (2k+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow \mathbf{t = \frac{(2k+1)\pi}{4000}\,s}.$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi\cdot 10^{-3}\,s = \frac{2\pi}{1000}\,s = \frac{8\pi}{4000}\,s$

Δηλαδή θέλουμε $0 \le t \le \frac{8\pi}{4000}\,s$, άρα οι ζητούμενες λύσεις είναι:

$t_1 = \frac{\pi}{4000}\,s$, $t_2 = \frac{3\pi}{4000}\,s$, $t_3 = \frac{5\pi}{4000}\,s$ και $t_4 = \frac{7\pi}{4000}\,s$

δ. Το μέγιστο χρονικό διάστημα που η πολικότητα του πυκνωτή παραμένει σταθερή είναι όσο το ρεύμα έχει σταθερή φορά δηλαδή $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi\cdot 10^{-3}}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \pi\cdot 10^{-3}\,s}$