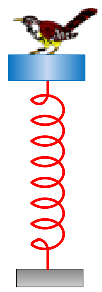
1. Κατακόρυφη εκτίναξη.

Δίσκος μάζας Μ = 1 kg είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο δίσκο κάθεται ένα πουλί μάζας m = 0,2 kg και κάποια στιγμή εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ = 2 m/s. Να βρείτε



α. το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά ο δίσκος.

β. το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου,

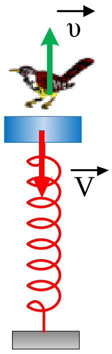
γ. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης.

δ. τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Δίνεται $g = 10 m/s^2$, η διάρκεια της εκτίναξης θεωρείται αμελητέα.

Λύση

α. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στο πουλί και το δίσκο είναι εσωτερικές δυνάμεις, το βάρος μεν από το πουλί και από το δίσκο όπως και η δύναμη του ελατηρίου είναι εξωτερικές δυνάμεις αλλά μπορούμε να τις χαρακτηρίσουμε αμελητέες σε σχέση με αυτές ανάμεσα στο πουλί και το δίσκο, οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ορμής.



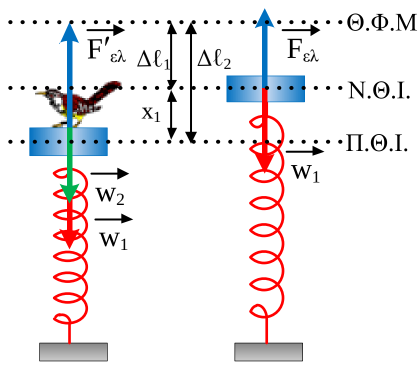
$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow 0 = \vec{p}_M + \vec{p}_m \Rightarrow 0 = -MV + m\upsilon \Rightarrow V = \frac{m\upsilon}{M} \Rightarrow \mathbf{V = 0{,}4\frac{m}{s}}$$

β. Το σώμα Μ ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 = F_{ελ} \Rightarrow Mg = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = 0{,}05\,m}$$

Το σύστημα των δύο ισορροπούσε σε μία θέση για την οποία έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 = F'_{ελ} \Rightarrow Mg + mg = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{12}{200} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_2 = 0{,}06\,m}$$



Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Ο δίσκος ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή: $x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,01\,m}$ (δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλούσε το σώμα m που φεύγει) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Θ.Ι. όπου $x_1 = 0,01\,m$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{MV^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1\cdot 0,16}{200} + 0,0001} \Rightarrow \mathbf{A = 0,03m}$$

γ. Μέγιστη δυναμική ενέργεια έχει ο δίσκος όταν βρίσκεται στο άκρο της ταλάντωσης άρα:

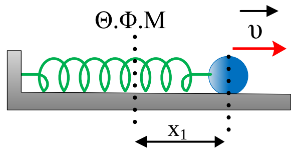
$$U_{max} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow U_{max} = \frac{1}{2}200\cdot 0,0009 \Rightarrow \mathbf{U_{max} = 0,09\,J}$$

δ. Το ελατήριο έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στην μέγιστη παραμόρφωση που είναι (η παραμόρφωση που έχει στη Θ.Ι. και το πλάτος ταλάντωσης του):

$$\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_1 + A \Rightarrow \Delta\ell_{max} = 0,05 + 0,03 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_{max} = 0,08\,m}$$

$$U_{max}^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow U_{max}^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}200\cdot 0,0064 \Rightarrow \mathbf{U_{max}^{\varepsilon\lambda} = 0,64\,J}$$

2. Έκρηξη έχοντας ταχύτητα πριν απ' αυτήν.



Ένα σώμα μάζας m = 4 kg που φέρει εσωτερικό εκρηκτικό μηχανισμό είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 0,2 m πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 = 0,12 m εκρήγνυται σε δύο κομμάτια. Το πρώτο κομμάτι μάζας m_1 = 1 kg παραμένει δεμένο με το ελατήριο και συνεχίζει την ταλάντωση κινούμενο ομόρροπα με το αρχικό σώμα. Το δεύτερο κομμάτι μάζας m_2 = 3 kg κινείται με ταχύτητα υ_2 = 0,9 m/s ομόρροπα με το κομμάτι μάζας m_1.

α. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης της μάζας m_1

β. Ποια η ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη

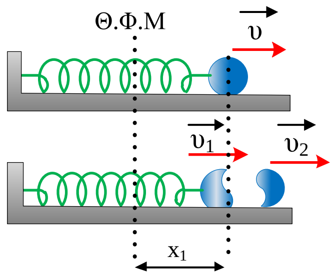
γ. Ποια είναι η διαφορά της περιόδου ταλάντωσης της μάζας m_1, από την περίοδο ταλάντωσης της μάζας m;

δ. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της ορμής της μάζας m_1;

ε. Ποια είναι η κινητική ενέργεια της μάζας m_1 όταν βρίσκεται στη θέση x_2 = 0,1 m.

Δίνεται $\sqrt{0{,}1513} \simeq 0{,}4$

Λύση



α. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την έκρηξη είναι πολύ μεγάλες και εσωτερικές για το σύστημα, οπότε αυτό μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, συνεπώς η ορμή διατηρείται.

Η ταχύτητα που είχε το σώμα μάζας m πριν την κρούση μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. στη θέση αυτή.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{k(A^2 - x_1^2)} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{100(0,04 - 0,0144)} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 1,6\frac{m}{s}}$$

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m\upsilon = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m\upsilon - m_2\upsilon_2}{m_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{6,4 - 2,7}{1} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 3,7\frac{m}{s}}$$

Η νέα ταλάντωση αρχίζει στη θέση x_1 έχοντας ταχύτητα υ_1 και για να βρω το νέο πλάτος εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη θέση αυτή.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{m_1\upsilon_1^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{1\cdot 13,69}{100} + 0,0144} \Rightarrow \mathbf{A_1 = \sqrt{0,1513}\,m} \Rightarrow$$

$\mathbf{A_1 \simeq 0,4\ m}$

β. Η διαφορά της κινητικής ενέργειας πριν την κρούση και αυτής μετά την κρούση είναι η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά την έκρηξη.

$$E_{εκρ} = K_{τελ} - K_{αρχ} = \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2\right) - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = (6,845 + 1,215) - 5,12 \Rightarrow \mathbf{E_{εκρ} = 2,94\,J}$$

γ. Η αρχική ταλάντωση έχει περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{2\pi}{5}s}$

Το σώμα μάζας m_1 έχει περίοδο $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{5}s}$

Άρα $\Delta T = T_1 - T = \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \mathbf{\Delta T = -\frac{\pi}{5}s}$ δηλαδή η περίοδος μειώθηκε κατά π/5 s (το σώμα τώρα ταλαντώνεται πιο γρήγορα).

δ. Για την νέα ταλάντωση έχουμε: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \mathbf{\omega_1 = 10\frac{rad}{s}}$ και $\upsilon_{max} = \omega_1 A_1 \Rightarrow \mathbf{\upsilon_{max} = 4\ m/s}$

Η μέγιστη τιμή της ορμής είναι: $p_{max} = m_1\upsilon_{max} \Rightarrow \mathbf{p_{max} = 4\ kg\cdot m/s}$

ε. Για να βρούμε την κινητική ενέργεια εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση

$$E = K + U \Rightarrow K = \frac{1}{2}kA_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,16 - \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,01 \Rightarrow \mathbf{K = 7,5\,J}$$