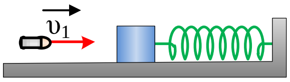
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ – ΚΡΟΥΣΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΡΟΥΣΗ.

1. Σώμα που κινείται με κάποια ταχύτητα συγκρούεται ανελαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.



Βλήμα μάζας m = 0,1 kg κινείται σε οριζόντιο τροχιά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ μέτρου 120 m/s συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας M που βρίσκεται σε επίπεδο που παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής μ = 5/8, δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.

α. Να βρεθεί η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου.

β. Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του βλήματος που αποτελεί η ενέργεια του ελατηρίου όταν το σώμα σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά.

γ. Να βρεθεί η θέση όπου το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται μόνιμα. Θεωρήστε ότι $\mu = \mu_s$ (η μέγιστη στατική τριβή ισούται με την τριβή ολίσθησης).

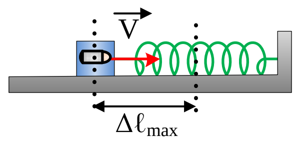
Λύση

α. Στο σύστημα ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{w}_1, \vec{w}_2$, και η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$. Οι δυνάμεις αυτές είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση ($\vec{N}, \vec{w}_1$ έχουν άλλωστε συνισταμένη μηδέν). Άρα το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m\upsilon_1 = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m\upsilon_1}{m+M} \Rightarrow \mathbf{V = 3\frac{m}{s}}$$

Για να βρούμε την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου θα χρησιμοποιήσουμε την Α.Δ.Ε. για το σύστημα:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma} = Q + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = |-T\cdot\Delta\ell_{max}| + \frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell_{max}^2 \text{ με } T = \mu\cdot N = \mu(m+M)g \Rightarrow \mathbf{T = 25\,N}$$



$$\frac{1}{2}4\cdot 9 = 25\cdot\Delta\ell_{max} + \frac{1}{2}100\cdot\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow 50\cdot\Delta\ell_{max}^2 + 25\cdot\Delta\ell_{max} - 18 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι: Δ = 4225 και οι λύσεις $\Delta\ell_{max} = \dfrac{-25\pm 65}{100} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_{max} = 0,4\,m}$

β. Η αρχική ενέργεια του βλήματος είναι: $K_1 = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \cdot 14400 \Rightarrow \mathbf{K_1 = 720\,J}$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο είναι: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k\Delta\ell_{max}^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0{,}16 \Rightarrow \mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 8\,J}$

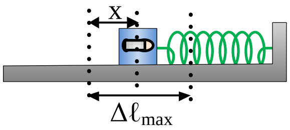
Άρα το ποσοστό είναι $\pi\% = \frac{U_{\varepsilon\lambda}}{K_1} \cdot 100\% = \frac{8}{720} \cdot 100\% \Rightarrow \pi\% = 1{,}11\%$

γ. Το ερώτημα αυτό είναι αρκετά δύσκολο και χρειάζεται διερεύνηση.

Ας δούμε πρώτα αν το συσσωμάτωμα επιστρέφει στην Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = (\frac{1}{2} k\Delta_{max}^2 - 0) - T \cdot \Delta\ell_{max} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 8 - 10 \Rightarrow \mathbf{K_{\tau\varepsilon\lambda} = -2\,J}$$

Ποια η σημασία του αποτελέσματος; Το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι για να φτάσει (οριακά με Κ=0) το σώμα στην θέση ισορροπίας χρειάζεται επιπλέον 2 J, άρα σταματά κάπου ενδιάμεσα μεταξύ Θ.Φ.Μ. και θέσης μέγιστης παραμόρφωσης.



Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για τις παραπάνω θέσεις

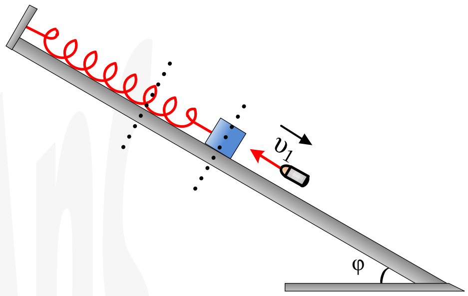
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} k\Delta\ell_{max}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - T(\Delta\ell_{max} - x) \Rightarrow 0 = 8 - 50x^2 - 10 + 25x \Rightarrow 50x^2 - 25x + 2 = 0$$

Με διακρίνουσα $\Delta = 225$ και λύσεις $x = \frac{25 \pm 15}{100}\,\text{m}$

Με δεκτή την λύση **x = 0,1 m**, η άλλη λύση x = 0,4 m είναι η αρχική θέση αφού στην ουσία ζητάμε από την εξίσωση να μας δώσει λύσεις όπου η κινητική ενέργεια είναι μηδέν (αρχή και τέλος).

Η θέση αυτή είναι και θέση μόνιμης ακινητοποίησης αφού η δύναμη που ασκεί το ελατήριο έχει μέτρο $F_{\varepsilon\lambda} = kx = 10$ N ενώ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι $T_{\sigma\tau,max} = 25$ N, άρα $F_{\varepsilon\lambda} < T_{\sigma\tau}$ και το σώμα μένει μόνιμα στη θέση αυτή.

2. Πλαστική κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο με το πάνω άκρο στην κορυφή.



Βλήμα μάζας m_1 = 0,4 kg εκτοξεύεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2 = 1,6 kg δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k = 100 N/m, η κρούση τους είναι πλαστική. Το δάπεδο παρουσιάζει τριβή με το σώμα m_2 με συντελεστή μ. Αρχικά τοποθετούμε το σώμα m_2 σε τέτοιο σημείο ώστε η στατική τριβή να έχει τη μέγιστη τιμή της $T_{στ,max}$ = 2 N και κατεύθυνση ίδια με τη συνιστώσα του βάρους $\vec{w}_{2x}$. Το συσσωμάτωμα φτάνει ως τη θέση Φ.Μ. του ελατηρίου. Να βρείτε:

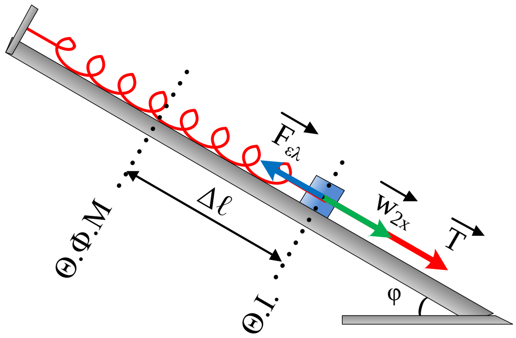
α. την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου και τον συντελεστής τριβής.

β. την ταχύτητα του συσσωματώματος

γ. τη μεταβολή της ορμής του βλήματος εξαιτίας της κρούσης.

Δίνεται g = 10 m/s^2, φ = 30^o και ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και στατικής τριβής ταυτίζονται.

Λύση



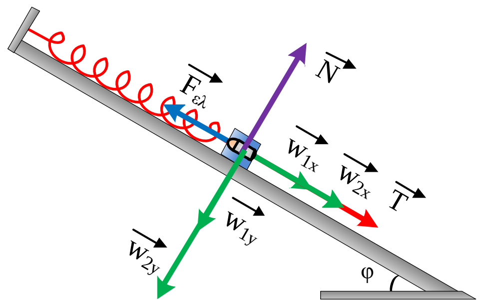
α. Από την αρχική ισορροπία έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = T_{στ,max} + w_{2x} \Rightarrow k\Delta\ell = T_{στ,max} + m_2 g ημφ \Rightarrow$$

$$100\Delta\ell = 2 + 8 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,1\,m}$$

Επίσης ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow N = w_{2y} \Rightarrow N = m_2 g συνφ \Rightarrow \mathbf{N = 8\sqrt{3}\,N}$

και $T_{στ,max} = \mu N \Rightarrow \mu = \dfrac{T_{στ,max}}{N} \Rightarrow \mu = \dfrac{2}{8\sqrt{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{12}}$



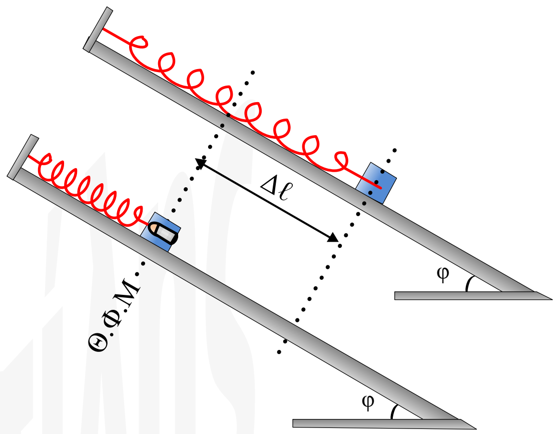
β. Στο κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N' = w_{1y} + w_{2y} = m_1 g συνφ + m_2 g συνφ \Rightarrow \mathbf{N' = 10\sqrt{3}N}$$

και η τριβή ολίσθησης $T = \mu N' \Rightarrow T = \dfrac{\sqrt{3}}{12}10\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{T = 2,5\,N}$

Εφαρμόζω το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από την δημιουργία του μέχρι να σταματήσει.

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου για μία μετατόπιση $\Delta\ell$ του συσσωματώματος είναι:



$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\Delta U = U^{\varepsilon\lambda}_{\alpha\rho\chi} - U^{\varepsilon\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - 0 \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = W_T + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_{w_{o\lambda}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = -T\Delta\ell + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - (m_1+m_2)g\eta\mu\varphi\cdot\Delta\ell \Rightarrow -V^2 = -2,5+0,5-1 \Rightarrow \mathbf{V = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$$

γ. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, $\vec{N}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1+m_2)V \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{(m_1+m_2)V}{m_1} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{0,4} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 5\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$$

Άρα για την μεταβολή της ορμής έχουμε:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}\,'_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta p_1 = p'_1 - p_1 = m_1V - m_1\upsilon_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta p_1 = -1,6\sqrt{3}\,\frac{kg\cdot m}{s}}$$