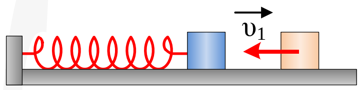
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΡΟΥΣΗ.

1. Σώμα που συγκρούεται ανελαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.



Σώμα μάζας m_1 = 1 kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ μέτρου υ_1 = 5 m/s συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_2 = 2 kg ανελαστικά που βρίσκεται δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου υ'_1 = 1 m/s. Να βρείτε

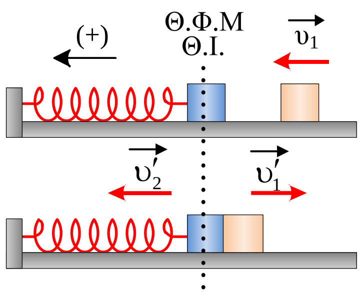
α. το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_2.

β. την απώλεια της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση

γ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος m_2 τη στιγμή που η ορμή είναι μηδέν.

δ. το ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος m_2 όταν περνά για πρώτη φορά από τη θέση $x_1 = A/2$.

Λύση



α. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = -m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon'_1}{m_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon'_2 = \frac{5+1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon'_2 = 3\,\frac{m}{s}}$$

Η κυκλική συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση $D = k = m_2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$.

Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. της ταλάντωσης οπότε η ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_2$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης και ισχύει $\upsilon'_2 = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{3}{10} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,3\,m}$.

β. Η απώλεια της κινητική ενέργειας βρίσκεται από τη σχέση.

$$E_{\alpha\pi} = K^{o\lambda}_{\alpha\rho\chi} - K^{o\lambda}_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - (\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2) = \frac{1}{2}1\cdot 25 - (\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 9) \Rightarrow \mathbf{E_{\alpha\pi} = 3\,J}$$

γ. Η ορμή μηδενίζεται στα άκρα άρα $\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F| = |-DA| \Rightarrow \left|\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}}\right| = \mathbf{60\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = -D\vec{x}\cdot\vec{\upsilon} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k\cdot\frac{A}{2}\cdot\upsilon_1 \quad (1)$$

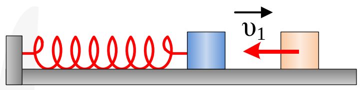
Η ταχύτητα στη θέση x_1 μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. της ταλάντωσης στη θέση αυτή:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = \upsilon_1^2 + \omega^2\frac{A^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{3\omega^2A^2}{4} \Rightarrow \upsilon_1 = \pm\frac{\sqrt{3}\omega A}{2}$$

αλλά για πρώτη φορά θα περάσει με $\upsilon > 0$, οπότε $\upsilon_1 = \frac{\sqrt{3}\omega A}{2}$

και από την (1) $\frac{dK}{dt} = -200\cdot\frac{0,3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 10\cdot 0,3}{2}\frac{J}{s} \Rightarrow \frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-45\sqrt{3}\,\frac{J}{s}}$

2. Σώμα συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου.



Σώμα μάζας m_1 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_2 πλαστικά που βρίσκεται δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Μετά την κρούση (η απώλεια της κινητικής ενέργειας είναι $E_{απ}$ = 24 J) το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης x = 0,2ημ10t (S.I.) και δέχεται μέγιστη δύναμη από το ελατήριο F_{max} = 80 N. Να βρείτε:

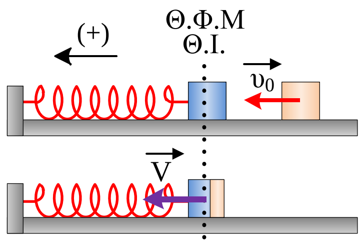
α. το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση

β. τη σταθερά του ελατηρίου

γ. την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του σώματος μάζας m_1

δ. τις μάζες m_1 και m_2

Λύση



α. Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. της ταλάντωσης οπότε η ταχύτητα $\vec{V}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης και ισχύει $V = \upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \mathbf{V = 2\frac{m}{s}}$.

β. το πλάτος της ταλάντωσης όπως προκύπτει από την εξίσωση της απομάκρυνσης είναι, A = 0,2 m, ενώ η μέγιστη δύναμη δίνεται από τη σχέση $F_{max} = kA \Rightarrow k = \frac{F_{max}}{A} \Rightarrow k = \frac{80}{0,2} \Rightarrow \mathbf{k = 400\frac{N}{m}}$.

γ. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{συσ} \Rightarrow m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)V \ \ (1).$$

Η κυκλική συχνότητα είναι ω = 10 rad/s και ισχύει:

$$D = k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow \mathbf{m_1 + m_2 = 4 kg} \ \ (2).$$

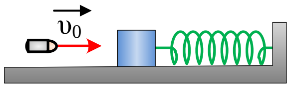
Από την απώλεια της κινητικής ενέργειας έχουμε: $E_{\alpha\pi} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow$

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0 \cdot \upsilon_0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V \cdot \upsilon_0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \upsilon_0 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$24 = 4 \cdot \upsilon_0 - 8 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 8\frac{m}{s}}$$

δ. Από την (1) $\Rightarrow 8m_1 = 4 \cdot 2 \Rightarrow$ $\mathbf{m_1 = 1\ kg}$ και τελικά από την (2) έχουμε $\mathbf{m_2 = 1\ kg}$

3. Πλαστική κρούση και ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας m_2 = 3,99 kg βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο και είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 400 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα σε τοίχο. Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο βρίσκεται στην κατάσταση του φυσικού του μήκους. Ένα βλήμα μάζας m_1 = 0,01 kg κινείται οριζόντια στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου 200 m/s και σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα μάζας m_2, οπότε το συσσωμάτωμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

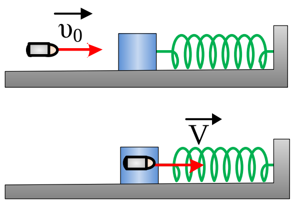
α. Να υπολογίσετε την κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση τους.

β. Να βρείτε τη χρονική διάρκεια κίνησης του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή που δημιουργήθηκε μέχρι να επανέλθει στο σημείο της κρούσης για πρώτη φορά.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

δ. Να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής.

Λύση



α. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{συσ} \Rightarrow m_1\upsilon_0 = (m_1+m_2)V \Rightarrow 2 = 4V \Rightarrow \mathbf{V = 0,5\frac{m}{s}} \quad (1).$$

Η κυκλική συχνότητα είναι: $D = k = (m_1+m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\dfrac{rad}{s}}$.

β. Η πλαστική κρούση έγινε στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, που ταυτίζεται με τη Θ.Ι. της ταλάντωσης όπως έχουμε δει. Η ταλάντωση συσσωματώματος αρχίζει αμέσως μετά τη στιγμή της κρούσης από τη θέση ισορροπίας του και με φορά τα δεξιά, οπότε το συσσωμάτωμα θα επανέλθει για πρώτη φορά στην ίδια θέση μετά από χρόνο $\Delta t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = \dfrac{\pi}{10}\dfrac{rad}{s}}$

γ. Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος έχει τη γενική μορφή: $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι μηδέν αφού ξεκινάμε από τη Θ.Ι. με κατεύθυνση προς τη θετική φορά.

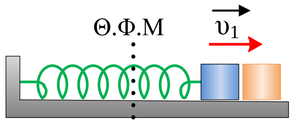
Η ταχύτητα του συσσωματώματος που βρήκαμε είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του.

Ισχύει: $\alpha_{max} = \upsilon_{max}\omega = V\omega \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{max} = 5\frac{m}{s^2}}$ οπότε έχουμε: **$\alpha = -5\eta\mu 10t$ (S.I.)**

δ. Η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{max} = \Sigma F_{max} = (m_1 + m_2)\alpha_{max} \Rightarrow \left.\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathbf{max}} = \mathbf{20\frac{kg \cdot m}{s^2}}$$

4. Πλαστική κρούση και ταλάντωση



Σώμα Σ_1 μάζας m_1 = 1 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και περιόδου T = 0,2π s πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Τη χρονική στιγμή που τη θεωρούμε ως t = 0 το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση $\vec{x}_1$ η οποία απέχει απόσταση x_1 = 0,4 m από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, έχοντας ταχύτητα μέτρου $8\sqrt{3}$ m/s και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 3 kg, όπως φαίνεται στο σχήμα.

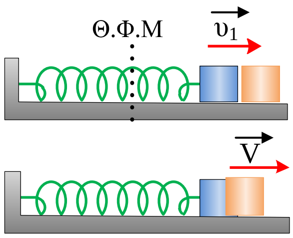
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

β. Να βρείτε την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της πλαστικής κρούσης

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά.

Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Λύση



α. Η πλαστική κρούση των δύο σωμάτων γίνεται στη θέση x_1, όπου το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου υ_1, ενώ το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow 8\sqrt{3} = 4V \Rightarrow \mathbf{V = 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}.$$

β. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $E_{\alpha\pi} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$

$$\Rightarrow E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}1\cdot 64\cdot 3 - \frac{1}{2}4\cdot 3 \Rightarrow \mathbf{E_{\alpha\pi} = 90\,J}$$

γ. Η αρχική κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$ και επίσης

$$D = k = m_1\omega^2 \Rightarrow \mathbf{k = 100\frac{N}{m}}$$

Η Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου (άρα και με τη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ_1). Συνεπώς, η θέση $\vec{x}_1$ όπου έγινε η κρούση δεν είναι η Θ.Ι. της ταλάντωσης του συσσωματώματος και η ταχύτητα $\vec{V}$ δεν είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Για να βρούμε το πλάτος της νέας ταλάντωσης εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη θέση της κρούσης.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)V^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4\cdot4\cdot3}{100} + 0{,}16} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}8\,m}$$

Η νέα κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $D' = k = (m_1+m_2)\omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \mathbf{\omega' = 5\frac{rad}{s}}$

και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας $\upsilon_{max} = \omega' A \Rightarrow \mathbf{\upsilon_{max} = 4\frac{m}{s}}$

Η νέα ταλάντωση έχει αρχική φάση αφού για t = 0 έχουμε $x = x_1$

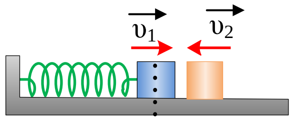
$$x_1 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}8\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\,rad \end{array}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$$\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0 \end{array} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad}$$

Άρα έχουμε: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega' t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(5t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.)}$

5. Πλαστική κρούση και ταλάντωση



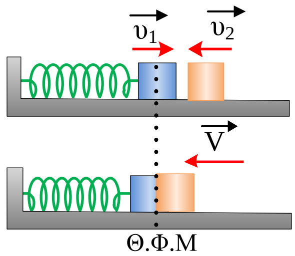
Σώμα Σ$_1$ μάζας m_1 = 1 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A_1 = 0,2 m πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο με οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Κάποια χρονική στιγμή που θεωρείται ως t = 0 το σώμα (1) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα δεξιά και τη στιγμή αυτή συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα Σ$_2$ μάζας m_2 = 3 kg, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ αντίθετης φοράς από την ταχύτητα του σώματος Σ$_1$. Το συσσωμάτωμα που δημιουργεί έχει αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα ίδιας φοράς με αυτή που είχε το σώμα Σ$_2$ πριν την κρούση και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ενέργειας 32 J.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

γ. Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του Σ$_1$ κατά τη διάρκεια της κρούσης και το μέτρο της δύναμης που δέχτηκε από το Σ$_2$ κατά την διάρκεια της κρούσης αν αυτή διήρκησε Δt = 0,002 s.

Λύση



α. Η κρούση γίνεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ$_1$ η οποία είναι ταυτόχρονα και η Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει ταλάντωση γύρω από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου, δηλαδή η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι ίδια με τη Θ.Ι. της ταλάντωσης του σώματος Σ$_1$.

Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του σώματος Σ$_1$. Έχουμε:

$$D = k = m_1\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 10\frac{rad}{s}}$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ είναι: $\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega_1 A_1 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 2\frac{m}{s}}$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί ταλάντωση με ενέργεια $E' = 32$ J. Αφού η κρούση γίνεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του, το μέτρο της ταχύτητας V ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του. Είναι:

$$E' = \frac{1}{2}kA_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2E'}{k}} \Rightarrow \mathbf{A_2 = 0,8\,m} \text{ και επίσης } D' = k = (m_1 + m_2)\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2} \mathbf{= 5\,\frac{rad}{s}}$$

Οπότε $V = \upsilon'_{max} = \omega_2 A_2 \Rightarrow \mathbf{V = 4\,\frac{m}{s}}$

Για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας υ_2, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -(m_1 + m_2)V \Rightarrow 2 - 3\upsilon_2 = -16 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2} \mathbf{= 6\,\frac{m}{s}}$$

β. Το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ που αρχίζει η ταλάντωση του βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του με $\upsilon = V = \upsilon_{max} < 0$ (κινείται προς τ' αριστερά, ενώ έχουμε θετική τη φορά προς τα δεξιά). Είναι:

Για $t = 0$: $\upsilon = -\upsilon_{max} \Rightarrow \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\upsilon_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \pi}\,\mathbf{rad}$

Άρα έχουμε $x = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,8\eta\mu(5t + \pi)\ (S.I.)}$

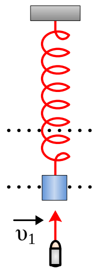
Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}100 \cdot 0,64\eta\mu^2(5t + \pi) \Rightarrow \mathbf{U = 32\eta\mu^2(5t + \pi)\ \ (S.I.)}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής του Σ_1 είναι: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p'}_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -p'_1 - p_1 = -m_1V - m_1\upsilon_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta p_1 = -6\,\frac{kg \cdot m}{s}}$

και το μέτρο της δύναμης που δέχτηκε από το Σ_2 είναι: $|F| = \left|\frac{\Delta p_1}{\Delta t}\right| = \frac{6}{0,002} \Rightarrow \mathbf{|F| = 3000\,N}$

6. Πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ελατήριο με το πάνω άκρο στην οροφή.



Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 3$ kg ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Ένα βλήμα, σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 1$ kg κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή t = 0 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_1$ έχοντας ακριβώς πριν την κρούση ταχύτητα μέτρου $2\sqrt{3}$ m/s.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση,

β. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

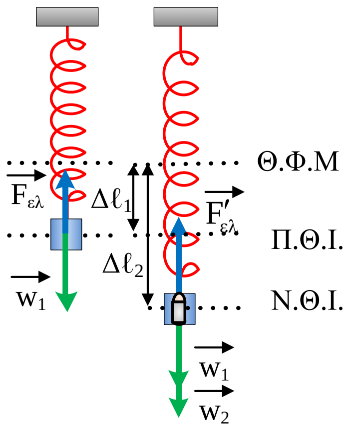
γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του, θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα πάνω.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$. Θεωρήστε αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης .

Λύση

α. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{F}_{ελ}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{συσ} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbf{V = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}}$$



β. Το σώμα m_1 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 = F_{ελ} \Rightarrow m_1 g = kΔ\ell_1 \Rightarrow Δ\ell_1 = \frac{30}{100} \Rightarrow \mathbf{Δ\ell_1 = 0,3\,m}$$

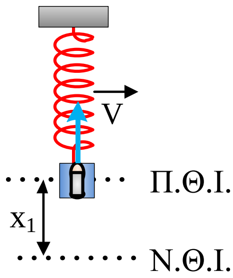
Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 = F'_{ελ} \Rightarrow m_1 g + m_2 g = kΔ\ell_2 \Rightarrow Δ\ell_2 = \frac{40}{100} \Rightarrow \mathbf{Δ\ell_2 = 0,4\,m}$$

Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:

$x_1 = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0{,}1\,m}$ (δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m_1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.



Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Θ.Ι. όπου $x_1 = 0{,}1\text{m}$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)V^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4\cdot\frac{3}{4}}{100} + 0{,}01} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2m}$$

γ. Η νέα ταλάντωση έχει αρχική φάση αφού για t = 0 έχουμε x = x1

$$x_1 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \varphi_0 &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 &= 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\pi}{6}\text{rad} \\ \varphi_0 &= \frac{5\pi}{6}\text{rad} \end{aligned}$$

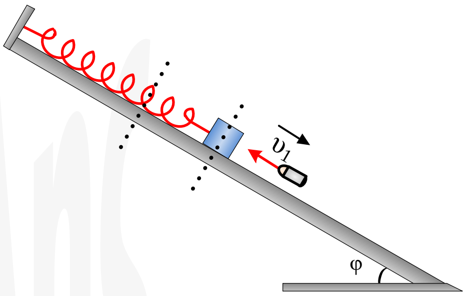
αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$$\begin{aligned} \upsilon &= \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon &= \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0 \end{aligned} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\textbf{rad}}$$

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $D = k = (m_1+m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\,\frac{rad}{s}}$

οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}2\eta\mu(5t + \frac{\pi}{6})}$ **(S.I.)**

7. Πλαστική κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο με το πάνω άκρο στην κορυφή.



Σώμα μάζας m_1 = 2 kg εκτοξεύεται κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\varphi = 30^o$ και φορά προς τα πάνω όπου ισορροπεί σώμα μάζας m_2 = 6 kg δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k, η κρούση τους είναι πλαστική και η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι $E_{\alpha\pi}$ = 2,25 J. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ με μέγιστη ταχύτητα μέτρου υ_{max} = 0,5 m/s. Να βρεθούν:

α. η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση

β. η σταθερά του ελατηρίου

γ. το πλάτος της ταλάντωσης

δ. το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να ακινητοποιηθεί

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2. Θεωρήστε αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης .

Λύση

α. Την στιγμή της κρούσης στην διεύθυνση της κίνησης οι εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$, $\vec{N}$) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις της κρούση οπότε το σύστημα θεωρείται μονωμένο και ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (θεωρώ την φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ θετική).

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = (m_1+m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \quad (1)$$

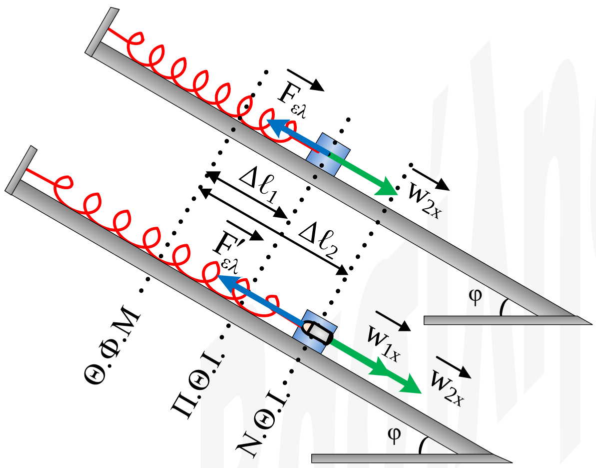
Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας είναι: $E_{\alpha\pi} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 \Rightarrow$

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}) \Rightarrow E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\frac{m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)E_{\alpha\pi}}{m_1m_2}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 2,25}{12}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}}.$$

β. Από την (1) προκύπτει ότι $V = \frac{2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \mathbf{V = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m}{s}}$

Το σώμα m2 ισορροπεί στη θέση όπου ισχύει: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{2x}=F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1}=\dfrac{\mathbf{m_2 g\eta\mu\varphi}}{\mathbf{k}}$ (2)



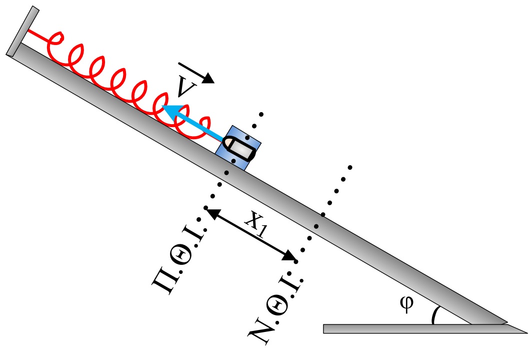
(Στο σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί οι κάθετες στην κίνηση δυνάμεις για χάριν απλότητας)

Το συσσωμάτωμα θα ισορροπεί σε μία νέα θέση για την οποία θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow w_{1x}+w_{2x}=F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_2}=\frac{\mathbf{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}}{\mathbf{k}} \quad (3)$$

Η ταλάντωση που θα επακολουθήσει θα γίνει γύρω από την νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.).

Το συσσωμάτωμα δεν ξεκινά την ταλάντωση του από τη Ν.Θ.Ι. αλλά απέχει από αυτή:



$$x_1=\Delta\ell_2-\Delta\ell_1=\frac{m_1 g\eta\mu\varphi + m_2 g\eta\mu\varphi}{k}-\frac{m_2 g\eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \mathbf{x_1}=\frac{\mathbf{m_1 g\eta\mu\varphi}}{\mathbf{k}}$$

(δηλαδή όσο επιπλέον παραμόρφωση προκαλεί το σώμα m1 που συσσωματώνεται) και την στιγμή εκείνη έχει ταχύτητα $\vec{V}$.

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης όπως βλέπουμε δεν έχει κάποια σχέση με αυτή της κρούσης γιατί όπως βλέπουμε η κρούση δεν γίνεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Ν.Θ.Ι.)

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην Π.Θ.Ι. όπου $x_1=\dfrac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k}$ (4).

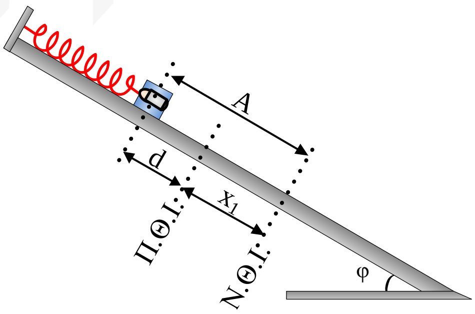
$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow (m_1 + m_2)\upsilon_{max}^2 = (m_1 + m_2)V^2 + k\left(\frac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)(\upsilon_{max}^2 - V^2) = \frac{m_1^2 g^2 \eta\mu^2\varphi}{k} \Rightarrow k = \frac{m_1^2 g^2 \eta\mu^2\varphi}{(m_1 + m_2)(\upsilon_{max}^2 - V^2)} \Rightarrow k = \frac{4 \cdot 100 \cdot \frac{1}{4}}{8(\frac{1}{4} - \frac{3}{16})} \Rightarrow k = \frac{100}{2 - 1,5} \Rightarrow \mathbf{k = 200\frac{N}{m}}$$

γ. το πλάτος της ταλάντωσης μπορεί τώρα να βρεθεί από τη μέγιστη ταχύτητα ξέροντας ότι:

$k = D = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\dfrac{rad}{s}}$, και $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = 0,1$ m.

δ. η κρούση γίνεται στην παλιά Θ.Ι. αλλά η ταλάντωση εξελίσσεται γύρω από τη νέα Θ.Ι. και το συσσωμάτωμα θα σταματήσει όταν θα απέχει απ' αυτή απόσταση ίση με το πλάτος αλλά σύμφωνα με το σχήμα ισχύει $A = d + x_1 \Rightarrow d = A - x_1$.



Από τη σχέση (4) έχουμε: $x_1 = \dfrac{m_1 g\eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,05\,m}$

Άρα $d = 0,1 - 0,05 \Rightarrow$ **d = 0,05 m**