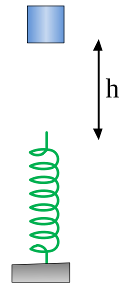
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ ΣΩΜΑ ΑΡΧΙΚΑ ΝΑ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΕΚΤΟΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ.

1. Σώμα που αφήνεται από κάποιο ύψος h.

Ελατήριο σταθεράς k = 200 N/m διατηρείται σε κατακόρυφη θέση στερεωμένο στο κάτω άκρο του. Σώμα μάζας m = 2 kg αφήνεται από ύψος h = 0,15 m πάνω από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Κατά την κρούση με το ελατήριο (χρονική στιγμή t_0 = 0) δεχόμαστε ότι το σώμα "δένεται" στο ελατήριο. Να βρείτε:



α. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που ακουμπά στο ελατήριο.

β. το πλάτος A της ταλάντωσης.

γ. τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σώματος.

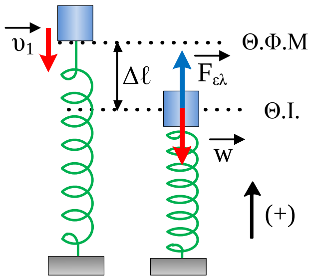
δ. τη χρονική εξίσωση της παραμόρφωσης του ελατηρίου.

ε. τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος;

Δίνεται g = 10 m/s^2. Θετική θεωρήστε τη φορά προς τα πάνω.

Λύση

α. Την στιγμή που το σώμα φτάνει στο ελατήριο έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου υ_1 η οποία μπορεί να βρεθεί είτε με Θ.Μ.Κ.Ε είτε με Α.Δ.Μ.Ε. είτε με τύπους ελεύθερης πτώσης). Εδώ θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{3}\ \frac{m}{s}}$$

β. Η ταλάντωση αρχίζει από τη στιγμή που το σώμα ακουμπά στο ελατήριο. Η απομάκρυνση τη στιγμή εκείνη από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η απόσταση Θ.Φ.Μ. και Θ.Ι. (Δℓ όπως φαίνεται στο σχήμα).

Σε Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = 0{,}1\,m}$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη Θ.Φ.Μ. όπου x = Δℓ.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{x=\Delta\ell}{\Rightarrow} A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{k} + \Delta\ell^2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0{,}2\,m}$$

γ. Τη στιγμή που το σώμα ακουμπά στο ελατήριο έχουμε x > 0 (αφού θετική φορά είναι η προς τα πάνω) και $\upsilon < 0$. Άρα για t = 0 έχουμε:

$$x = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\text{rad} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\text{rad} \end{matrix}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ < 0**.

$$\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0 \end{matrix} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\text{rad}}$$

Επίσης έχουμε $k = D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$ και $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 2\frac{m}{s}}$

Οι εξισώσεις είναι $\boldsymbol{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6})}$ **(S.I.)** και $\boldsymbol{\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{5\pi}{6})}$ **(S.I.)**

δ. Για την ταλάντωση έχουμε: $\Sigma\vec{F} = -D\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = -D\vec{x} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = -Dx \Rightarrow k\Delta\ell = mg - kx \Rightarrow$

$\Delta\ell = 0{,}1 - x \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = 0{,}1 - x}$ **(S.I.)**

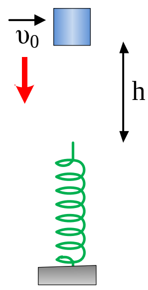
Παρατήρηση: Όπως βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση η παραμόρφωση του ελατηρίου μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, (αφού $-0{,}2\text{ m} \le x \le 0{,}2\text{ m}$). Τι σημαίνει όμως αυτό; Σημαίνει ότι όταν το ελατήριο ξεπεράσει το φυσικό μήκος από συσπείρωση έχουμε επιμήκυνση.

ε. Θέτουμε στην εξίσωση της ταχύτητας υ = 0 και έχουμε: $0 = 2\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow 10t + \frac{5\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{6k\pi - 2\pi}{60} \Rightarrow t = \frac{4\pi}{60} \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{15}s}.$$

2. Σώμα που εκτοξεύεται από κάποιο ύψος h προς τα κάτω.

Σώμα μάζας m = 2 kg εκτοξεύεται από ύψος h = 0,1 m πάνω από το άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 2 m/s. Μόλις το σώμα καρφωθεί στο ελατήριο χωρίς απώλειες ενέργειας το παραμορφώνει και σταματά όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι x_{max} = 0,6 m. Να βρείτε:



α. τη σταθερά του ελατηρίου.

β. το πλάτος A της ταλάντωσης.

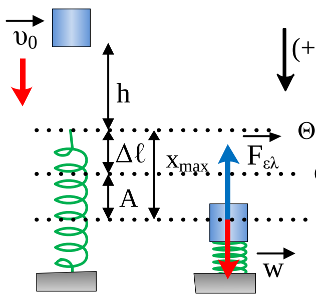
γ. τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σώματος.

δ. τη μεταβολή της ορμής από την χρονική στιγμή που ακουμπά στο ελατήριο μέχρι τη στιγμή που σταματά να επιταχύνεται για πρώτη φορά.

Δίνεται g = 10 m/s^2. Θετική θεωρήστε τη φορά προς τα κάτω.

Λύση

α. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση έως την θέση της μέγιστης παραμόρφωσης. $K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = W_w + W_{F_{ελ}}$



$$\Rightarrow -\frac{1}{2}mυ_0^2 = mg(h + x_{max}) - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow k = \frac{mυ_0^2 + 2mg(h + x_{max})}{x_{max}^2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{2 \cdot 4 + 40 \cdot 0,7}{0,36} \Rightarrow \mathbf{k = 100\frac{N}{m}}.$$

β. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $Σ\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = kΔ\ell \Rightarrow Δ\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \mathbf{Δ\ell = 0,2\,m}$

Για την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $x_{max} = A + Δ\ell \Rightarrow A = x_{max} - Δ\ell \Rightarrow \mathbf{A = 0,4\,m}$

γ. Την στιγμή έναρξης της ταλάντωσης έχουμε: x = – Δℓ < 0 και υ > 0 (θετική φορά η κάτω).

Άρα για t = 0: $x = Aημφ_0 \Rightarrow -0,2 = 0,4ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} φ_0 = 2kπ - \frac{π}{6} \\ φ_0 = 2kπ + \frac{7π}{6} \end{array}\right\} \xrightarrow{0 \le φ_0 < 2π} \begin{array}{l} φ_0 = \frac{11π}{6}\,rad \\ φ_0 = \frac{7π}{6}\,rad \end{array}$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} > 0$

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} < 0$

άρα $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}}$ **rad**

Επίσης έχουμε $k = D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\sqrt{2}\,\frac{rad}{s}}$

Η εξίσωση είναι $\mathbf{x = 0,4\eta\mu(5\sqrt{2}t + \frac{11\pi}{6})}$ **(S.I.)**

δ. Η ταχύτητα τη στιγμή της επαφής σώματος και ελατηρίου είναι:

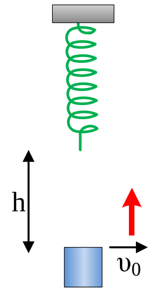
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh + \upsilon_0^2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{6}\,\frac{m}{s}}$$

ενώ σταματά να επιταχύνεται το σώμα όταν αποκτήσει την μέγιστη του ταχύτητα $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 2\sqrt{2}\,\frac{m}{s}}$

Η μεταβολή της ορμής είναι: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = m\upsilon_{max} - m\upsilon_1 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta p = 2\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})\,\frac{kg\cdot m}{s}}$

3. Σώμα που εκτοξεύεται από κάποιο ύψος h προς τα πάνω.

Σώμα μάζας m = 4 kg εκτοξεύεται προς τα πάνω από ύψος h = 0,2 m προς το κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k = 100 N/m, στο οποίο καρφώνεται χωρίς απώλεια ενέργειας και μετά εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθούν:



α. το πλάτος της ταλάντωσης.

β. το μέτρο της δύναμη που ασκεί το ελατήριο την στιγμή που το σώμα έχει τη μέγιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

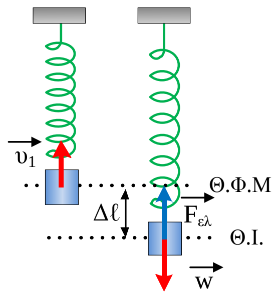
γ. το μέτρο της ορμής τη στιγμή που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

δ. το ποσοστό της αρχικής κινητική ενέργειας που αποτελεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή που το περνά από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

α. Την στιγμή που το σώμα φτάνει στο ελατήριο έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου υ_1 η οποία είναι:



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = \sqrt{5}\,\frac{m}{s}}$$

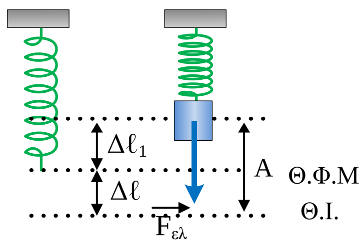
Η ταλάντωση αρχίζει από τη στιγμή που το σώμα ακουμπά στο ελατήριο. Η απομάκρυνση τη στιγμή εκείνη από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η απόσταση Θ.Φ.Μ. και Θ.Ι. ($\Delta\ell$ όπως φαίνεται στο σχήμα).

Σε Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{mg}{k} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\ell = 0,4\,m}$

Για το πλάτος της ταλάντωσης εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στη Θ.Φ.Μ. όπου x = $\Delta\ell$.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{x=\Delta\ell}{\Rightarrow} A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{k} + \Delta l^2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,6\,m}$$

β. Μέγιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια έχει το σώμα όταν βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ισχύει $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = 0,2\,m}$

Και για το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell_1 = 100 \cdot 0,2 \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = 20\,N}$

γ. τη στιγμή που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου υ_1 όπως την υπολογίσαμε παραπάνω άρα $p_1 = m\upsilon_1 \Rightarrow \mathbf{p_1 = 4\sqrt{5}\,\frac{kg \cdot m}{s}}$.

δ. Η αρχική κινητική ενέργεια είναι: $K_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow K_0 = \frac{1}{2}4 \cdot 9 \Rightarrow \mathbf{K_0 = 18\,J}$

ενώ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή που το σώμα περνά από τη Θ.Ι. είναι

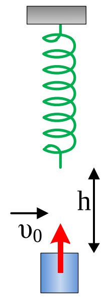
$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}100 \cdot 0,16 \Rightarrow \mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 8\,J}$ άρα

Από τα 18 J κινητικής ενέργειας τα 8 J είναι αποθηκευμένα στο ελατήριο

Από τα 100 J κινητικής ενέργειας τα y είναι αποθηκευμένα στο ελατήριο

οπότε y = 44,44 J ή 44,44%.

4. Σώμα που εκτοξεύεται από κάποιο ύψος h προς τα πάνω.



Σώμα μάζας m = 1 kg εκτοξεύεται από προς τα πάνω όπου σε ύψος h βρίσκεται το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου υ_0 = 6 m/s. Μόλις το σώμα καρφωθεί στο ελατήριο χωρίς απώλειες ενέργειας το παραμορφώνει και σταματά όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι x_{max} = 0,3 m. Να βρεθούν

α. η σταθερά του ελατηρίου

β. η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα.

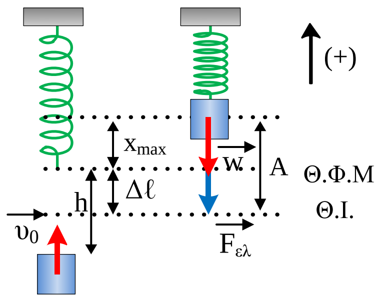
γ. ο ρυθμός μεταβολής της ορμής τη στιγμή που σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά.

δ. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη στιγμή που ακουμπά στο ελατήριο

Δίνεται g = 10 m/s². Θετική θεωρήστε τη φορά προς τα πάνω.

Λύση

α. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την αρχική θέση έως την θέση της μέγιστης παραμόρφωσης.



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w + W_{F_{ελ}} \Rightarrow -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mg(h + x_{max}) - \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{m\upsilon_0^2 - 2mg(h + x_{max})}{x_{max}^2} \Rightarrow k = \frac{1\cdot 36 - 2\cdot 1\cdot 10(1,05 + 0,3)}{0,09} \Rightarrow \mathbf{k = 100\,\frac{N}{m}}$$

β. Στη θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{mg}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,1\,m}$

Για την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου ισχύει: $A = x_{max} + \Delta\ell \Rightarrow \mathbf{A = 0,4\,m}$

Η ενέργεια είναι: $E = \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E = \dfrac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,16 \Rightarrow \mathbf{E = 8\,J}$

γ. Το σώμα σταματά στιγμιαία στην ανώτερη θέση όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και ισχύει:

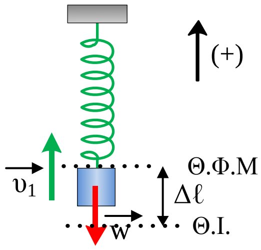
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{F}_{ελ} + \vec{w} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -F_{ελ} - w = -kx_{max} - mg \Rightarrow \mathbf{\frac{dp}{dt} = -40\,\frac{kg\cdot m}{s}}$$

δ. Η ταχύτητα τη στιγμή της επαφής σώματος και ελατηρίου είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{36 - 2\cdot 10\cdot 1,05} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1 = \sqrt{15}\,\frac{m}{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:



$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = -D\vec{x}\cdot\vec{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -k\cdot\Delta\ell\cdot\upsilon_1 = -100\cdot 0,1\cdot\sqrt{15} \Rightarrow \mathbf{\frac{dK}{dt} = -10\sqrt{15}\,\frac{J}{s}}$$

Θα μπορούσαμε να πούμε και το εξής: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -w\cdot\upsilon_1 = -10\sqrt{15}\,\frac{J}{s}$ αφού στη Θ.Φ.Μ. η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος.