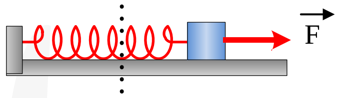
Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης.



1. Σε σώμα μάζας m = 1 kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθερά k = 100 N/m, όπως στο σχήμα. Ασκούμε σταθερή δύναμη μέτρου F = 40 N έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται. Θετική θεωρούμε τη φορά της δύναμης $\vec{F}$.

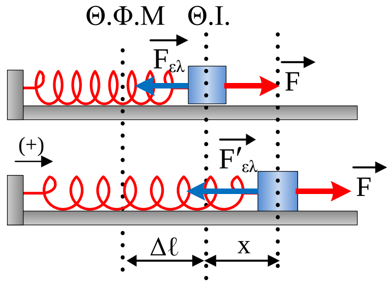
α. να δείξετε ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

β. να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης

γ. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να επιστρέψει στην αρχική θέση αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί μόλις γίνει ίση κατά μέτρο με την δύναμη του ελατηρίου.

δ. ποιος ο λόγος της ενέργειας της ταλάντωσης του αρχικού συστήματος, (με την δύναμη $\vec{F}$), προς την ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα, αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί μόλις το σώμα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά, μετά την άσκηση της.

Λύση



α. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης πλέον δεν είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αλλά εκεί που ισχύει $\Sigma\vec{F} = 0$ οπότε έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F = F_{ελ} \Rightarrow F = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,4\,m} \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση ισχύει: $\Sigma F = F - F'_{ελ} = F - k(\Delta\ell + x) \overset{(1)}{=} -kx = -Dx$

Άρα έχουμε Α.Α.Τ. με D = k = 100 N/m.

Δηλαδή η σταθερή δύναμη δεν επηρεάζει την σταθερά επαναφοράς που ισχύει ότι και σε ένα οριζόντιο ελατήριο χωρίς την εξωτερική αυτή δύναμη.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **Α = Δℓ = 0,4 m**, αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από την Θ.Φ.Μ. με μηδενική ταχύτητα άρα έχουμε ακραία θέση.

β. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = –A, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = -A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = -A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\,rad}$.

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ **(S.I.)**

γ. Αν η δύναμη καταργηθεί στη Θ.Ι. της αρχικής ταλάντωσης τότε ο χρόνος που χρειαζόμαστε από τη Θ.Φ.Μ. στη Θ.Ι. είναι $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = \frac{\pi}{20}s}$

Η δύναμη καταργείται στη Θ.Ι. της παλιάς ταλάντωσης, η νέα Θ.Ι. θα είναι η Θ.Φ.Μ. αφού η μόνη δύναμη που θα ασκείται στο νέο ταλαντούμενο σύστημα είναι η δύναμη του ελατηρίου που μηδενίζεται στη Θ.Φ.Μ. Θα βρούμε το πλάτος A′ της νέας ταλάντωσης εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση στην παλιά Θ.Ι. με x = A.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow kA'^2 = m\omega^2A^2 + kA^2 \Rightarrow A'^2 = 2A^2 \Rightarrow \boldsymbol{A' = \sqrt{2}A}$$

Θα βρούμε τώρα την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης αφού για t = 0, έχουμε x = A ⇒

$$A\sqrt{2}\eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{4}rad \\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{4}rad \end{matrix}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

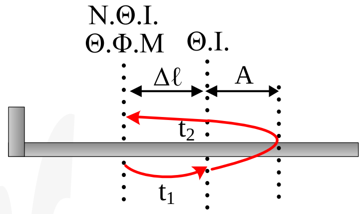
$$\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} < 0 \end{matrix} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{4}rad}$$

Για την νέα ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A'\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,4\sqrt{2}\eta\mu(10t + \frac{\pi}{4})}$ **(S.I.)**

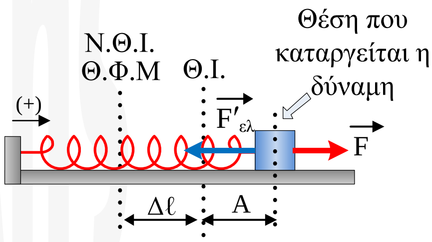
Η θέση εκκίνησης της παλιάς ταλάντωσης, είναι η Θ.Ι. της νέας ταλάντωσης (δηλαδή x = 0).

$$x=0 \Rightarrow 0,4\sqrt{2}ημ(10t+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow 10t+\frac{\pi}{4}=κπ \Rightarrow t=\frac{4κπ-\pi}{40} \Rightarrow \mathbf{t_2=\frac{3\pi}{40}s}$$



και τελικά έχουμε $t_{ολ}=t_1+t_2=\frac{\pi}{20}+\frac{3\pi}{40} \Rightarrow t_{ολ}=\frac{5\pi}{40} \Rightarrow \mathbf{t_{ολ}=\frac{\pi}{8}s}$

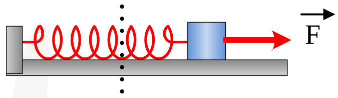
δ. Στο άκρο της ταλάντωσης η ταχύτητα είναι μηδέν οπότε θα είναι άκρο για την νέα ταλάντωση. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα:



$$A'=A+\Delta\ell \overset{A=\Delta\ell}{\Rightarrow} A'=A+A \Rightarrow \mathbf{A'=2A=0,8\ m}.$$

Άρα $$\frac{E}{E'}=\frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kA'^2}=\left(\frac{A}{2A}\right)^2 \Rightarrow \mathbf{\frac{E}{E'}=\frac{1}{4}}$$

2. Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου.



Σε σώμα μάζας m = 1 kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθερά k = 100 N/m, όπως στο σχήμα ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο που δίνεται από τη σχέση $F = 36x + 16$ (S.I.) έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή άσκησης της δύναμης $\vec{F}$.

α. Να δειχθεί ότι το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

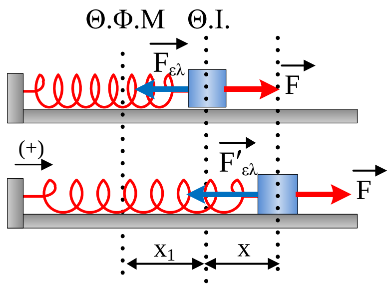
β. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης θωρώντας ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή που ξεκινά την ταλάντωση το σώμα και θετική τη φορά προς τα δεξιά.

γ. Αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί κάποια στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο δεξιό άκρο της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος, και ποια η νέα εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης θωρώντας εκ νέου χρονική στιγμή $t_0 = 0$ την στιγμή έναρξης της νέας ταλάντωσης και την ίδια θετική φορά.

δ. Αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί δεξιά της Θ.Ι. της ταλάντωσης κατά 0,15 m, ποιο το νέο πλάτος;

ε. Αν η δύναμη $\vec{F}$ καταργηθεί αριστερά της Θ.Ι. της ταλάντωσης κατά 0,15 m, ποιο το νέο πλάτος;

Λύση



α. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, δεν είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου αλλά εκεί που ισχύει $\Sigma\vec{F} = 0$ οπότε έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F = F_{ελ} \Rightarrow 16 + 36x_1 = 100x_1 \Rightarrow 16 = 64x_1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,25\,m} \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F - F'_{ελ} = 16 + 36(x + x_1) - k(x_1 + x) = 16 + 36x + 36 \cdot 0,25 - 100 \cdot 0,25 - 100x = -64x = -Dx$$

Άρα έχουμε Α.Α.Τ. με D = 64 N/m.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι **A = $\mathbf{x_1}$ = 0,25 m**, αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του από την Θ.Φ.Μ. με μηδενική ταχύτητα άρα έχουμε ακραία θέση.

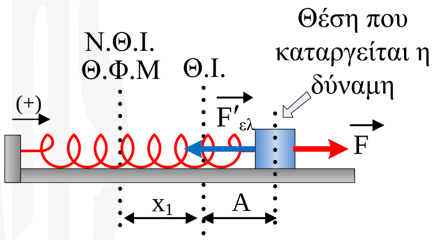
β. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = –A, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = -A \Rightarrow A\etaμ\varphi_0 = -A \Rightarrow \etaμ\varphi_0 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}\,\mathbf{rad}$.

Επίσης έχουμε: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{64}{1}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 8\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,25\eta\mu\left(8t + \frac{3\pi}{2}\right)\ (S.I.)}$.

γ. Στο άκρο της ταλάντωσης η ταχύτητα είναι μηδέν οπότε θα είναι άκρο για την νέα ταλάντωση. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα:



$A' = A + x_1 \overset{A=x_1}{\Rightarrow} A' = A + A \Rightarrow A' = 2A \Rightarrow \mathbf{A' = 0,5\,m}$.

Επίσης τώρα ισχύει $D' = k = 100$ N/m, και $D' = m\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D'}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 10\frac{rad}{s}}$

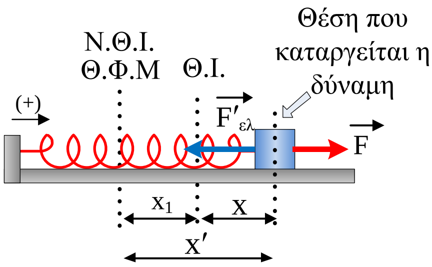
Η αρχική φάση τώρα είναι $\varphi_o = \pi/2$ αφού ξεκινάμε από το θετικό άκρο της ταλάντωσης.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = A' \Rightarrow A'\eta\mu\varphi_0' = A' \Rightarrow \eta\mu\varphi_0' = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0' = \frac{\pi}{2}\,rad}$.

Άρα $x = A'\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_0') \Rightarrow \mathbf{x = 0,5\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I.)}$.

δ. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση (με D = 64 N/m).



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m}} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{64(0,25^2 - 0,15^2)}{1}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm 1,6\frac{m}{s}}.$$

Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

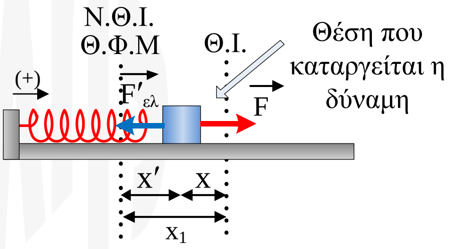
Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = x_1 + x \Rightarrow x' = 0,25 + 0,15 \Rightarrow \mathbf{x' = 0,4\,m}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση (με $D' = k = 100$ N/m):

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}D'A'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D'x'^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{1\cdot 1,6^2}{100} + 0,16} \Rightarrow \mathbf{A' = 0,08\sqrt{29}\,m}$$

ε. Αν η δύναμης $\vec{F}$ καταργηθεί αριστερά της Θ.Ι. της ταλάντωσης, ποιο το νέο πλάτος;

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει, τώρα είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.



Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα που βρίσκεται με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση (με D = 64 N/m).

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{D(A^2 - x^2)}{m}} \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{64(0,25^2 - 0,15^2)}{1}} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm 1,6\frac{m}{s}}$$

Το πρόσημο της ταχύτητας επηρεάζει μόνο την αρχική φάση της νέας ταλάντωσης.

Η απομάκρυνση από τη νέα θέση ισορροπίας είναι $x' = x_1 - x \Rightarrow x' = 0,25 - 0,15 \Rightarrow \mathbf{x' = 0,1\,m}$.

Εφαρμόζουμε ξανά Α.Δ.Ε. για την νέα ταλάντωση (με $D' = k$):

$$E' = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}D'A'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D'x'^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{1\cdot 1,6^2}{100} + 0,01} \Rightarrow \mathbf{A' = 0,02\sqrt{89}\,m}$$