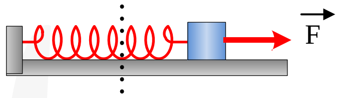
## Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης.




**1.** Σε σώμα μάζας m = 2 kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k = 200 N/m, όπως στο σχήμα ασκούμε σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 40 N έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι την θέση $x_1$ = 0,1 m και μετά η σταθερή δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0$ = 0, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$. Να βρείτε:

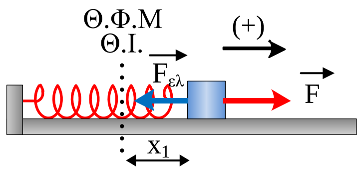
**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης

**β.** την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας θετική τη φορά της δύναμης

**γ.** την ταχύτητα της στιγμή κατάργησης της δύναμης

**δ.** το λόγο του έργου της δύναμης $\vec{F}$ προς το έργο της δύναμης του ελατηρίου.

**Λύση**




**α.** Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα. Άρα:

$$E = W_F = F\cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = F\cdot x_1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2F\cdot x_1}{D}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\cdot 40\cdot 0,1}{200}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$$

**β.** Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1$ = 0,1 m, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0$ = 0 έχουμε:

$$x = x_1 \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{x_1}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\,rad \end{matrix}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6} < 0 \end{array}\right. \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\mathbf{rad}}$$

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.)}$

**γ.** Η εξίσωση της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \upsilon = \mathbf{2\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.)}$ οπότε αν θέσουμε t = 0 έχουμε την ταχύτητα τη στιγμή έναρξης της ταλάντωσης.

t = 0: $\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \sqrt{3}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}}$.

Το ερώτημα αυτό θα μπορούσε να απαντηθεί και με εφαρμογή της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση την t = 0 ή ακόμη και με το Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ μέχρι την κατάργηση της.

**δ.** Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι: $W_F = F \cdot x_1 \Rightarrow \mathbf{W_F = 4\,J}$

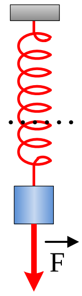
ενώ το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -\Delta U_{\varepsilon\lambda} = U_{\varepsilon\lambda}^{\alpha\rho\chi} - U_{\varepsilon\lambda}^{\tau\varepsilon\lambda} = 0 - \frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{1}{2}200 \cdot 0,01 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{\varepsilon\lambda}} = -1\,J}$$

άρα $\frac{W_F}{W_{F_{\varepsilon\lambda}}} = \frac{4}{-1} = -4$

**Σημείωση:** Οι ενεργειακές μεταβολές που συνέβησαν εδώ είναι οι εξής: Η δύναμη $\vec{F}$ προσέφερε ενέργεια μέσω του έργου της στο σύστημα ελατηρίου μάζας από τα οποία τα 3 J έχουν μετατραπεί σε κινητική ενέργεια και 1 J μέσω της δύναμης του ελατηρίου έχουν μετατραπεί σε ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου.

**Ταλάντωση με την βοήθεια σταθερής δύναμης που καταργείται στο άκρο.**




**2.** Σε σώμα μάζας m = 1 kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k = 100 N/m, όπως στο σχήμα ασκούμε σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 10 N, έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι το σώμα να ακινητοποιηθεί στιγμιαία και μετά η σταθερή δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$. Να βρείτε:

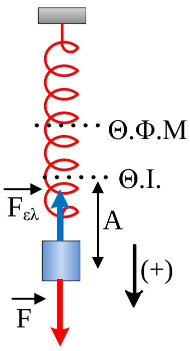
**α.** Το πλάτος της ταλάντωσης

**β.** την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας θετική τη φορά της δύναμης

**γ.** το ρυθμό μεταβολής της ορμής όταν περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

**δ.** τη χρονική στιγμή που περνά για πρώτη φορά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

**Λύση**




**α.** Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα, αλλά επειδή ασκείται μέχρι να ακινητοποιηθεί το σώμα σημαίνει ότι φτάνει ως το άκρο της ταλάντωσης που εκτελέσει μετά την κατάργηση της δύναμης το σύστημα. Άρα:

$$E = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = F\cdot A \Rightarrow A = \frac{2F}{D} \Rightarrow A = \frac{2\cdot 10}{100} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2m}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. αλλά με λίγες παραπάνω πράξεις.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - 0 = W_F + W_{F_{ελ}} + W_w \Rightarrow 0 = F\cdot A - \left(\frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2\right) + mgA \Rightarrow$$

$$0 = F\cdot A - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}kA^2 - k\Delta\ell A + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + mgA \Rightarrow 0 = F\cdot A - \frac{1}{2}kA^2 - k\Delta\ell A + mgA \qquad (1)$$

Στη Θ.Ι ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = mg \Rightarrow k\Delta\ell = mg$ (2) και τελικά από τις δύο σχέσεις

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = F\cdot A - \frac{1}{2}kA^2 - mgA + mgA \Rightarrow F\cdot A = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \frac{2F}{k} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2m}.$$

**β.** Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = +A, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0 = 0$ έχουμε: $x = A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}}$.

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})\ (S.I.)}$

**γ.** Στη Θ.Ι. έχουμε $x = -\Delta\ell$ αφού θετική είναι η φορά προς τα κάτω.

Από τη (2) $\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}1\mathrm{m}$

Άρα $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -100\cdot(-0{,}1) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dp}{dt} = 10\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$

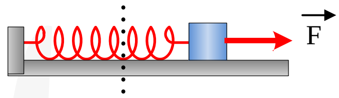
Επειδή η Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου είναι μία ειδική θέση για την ταλάντωση μπορούμε αυτό το ερώτημα να το απαντήσουμε διαφορετικά. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{w} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = mg \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dp}{dt} = 10\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$

**δ.** Από τη χρονοεξίσωση παραπάνω θέτουμε $x = -\Delta\ell \Rightarrow 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) = -0{,}1 \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 10t + \frac{\pi}{2} &= 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 10t + \frac{\pi}{2} &= 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{12k\pi - 4\pi}{60}\,s \\ t &= \frac{12k\pi + 4\pi}{60}\,s \end{aligned}$$

άρα για πρώτη φορά $t = \frac{4\pi}{60}\,s \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{15}\,s}$

**Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου.**




**3.** Σε σώμα μάζας m = 1 kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθερά k = 100 N/m, όπως στο σχήμα ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο που δίνεται από τη σχέση $F = 30 + 100x$ (S.I.) έτσι ώστε το ελατήριο να επιμηκύνεται, μέχρι την θέση $x_1$ = 0,2 m και μετά η δύναμη καταργείται. Ως χρονική στιγμή $t_0$ = 0, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.

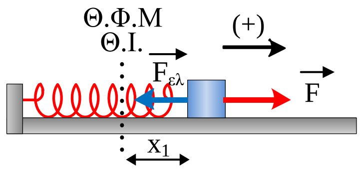
**α.** Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$.

**β.** Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$, θεωρώντας ως θετική την φορά της δύναμης $\vec{F}$.

**γ.** να βρείτε το χρόνο που χρειάστηκε για να ξαναπεράσει το σώμα από την θέση $x_1$ = 0,2 m.

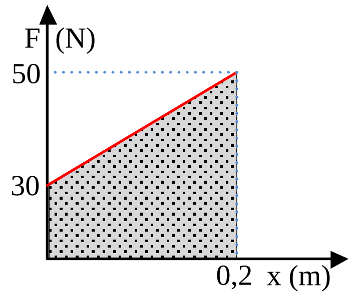
**δ.** να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας καθώς το σώμα ξαναπερνά από τη θέση κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.

**Λύση**




**α.** Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα. Επειδή το μέτρο της $\vec{F}$ μεταβάλλεται το έργο της υπολογίζεται με εμβαδομέτρηση, από τη θέση x = 0 έως τη θέση $x_1$ = 0,2 m.

Έχουμε: για x = 0 → F = 30 N και για x = 0,2 m → F = 50 N οπότε σχηματίζεται το διπλανό τραπέζιο.




Άρα: $E = W_F =$ εμβ.$= \frac{30+50}{2} \cdot 0,2 \Rightarrow \mathbf{E = 8\,J}$ και

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,4\,m}$$

**β.** Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης για οριζόντιο ελατήριο ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση x = 0,2 m, οπότε έχουμε αρχική φάση.

$$x = x_1 \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{x_1}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{0,2}{0,4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\text{rad} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\text{rad} \end{matrix}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$$\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0 \end{matrix} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\text{rad}}$$

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.)}$

**γ.** Για να βρούμε την χρονική στιγμή που το σώμα ξαναπερνά από τη θέση $x_1$ = 0,2 m, θέτουμε την τιμή αυτή στην εξίσωση που βρήκαμε παραπάνω και προκύπτει:

$$x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow 0,2 = 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 10t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t = \frac{12k\pi}{60}s \\ t = \frac{12k\pi + 4\pi}{60}s \end{matrix}$$

Άρα για πρώτη φορά μετά την t = 0 έχουμε $t_1 = \frac{4\pi}{60}s \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{15}s}$

**δ.** Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -Dx_1\upsilon_1 \quad (1)$$

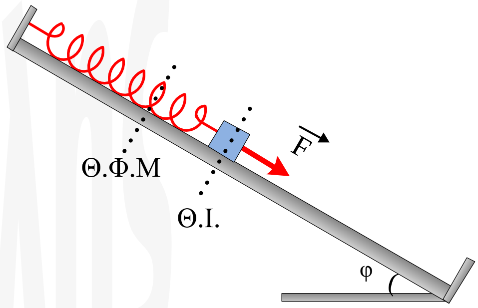
Για να βρούμε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας στην θέση $x_1$ = 0,2 m θέτουμε στην εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.) την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{15}s$ και προκύπτει:

$$\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{6}) = 4\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) = 4\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = -2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$$

και από την (1) έχουμε: $\frac{dK}{dt} = -100\cdot 0,2\cdot(-2\sqrt{3}) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK}{dt} = 40\sqrt{3}\,\frac{J}{s}}$

**Ταλάντωση με την βοήθεια δύναμης σταθερής κατεύθυνσης μεταβαλλόμενου μέτρου που προκαλεί σταθερή επιτάχυνση.**

**4.** Σε σώμα μάζας m = 2 kg ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, με γωνία κλίσης $\varphi = 30^o$ δεμένο στο ένα άκρο του ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, όπως στο σχήμα (το άλλο άκρο είναι ακλόνητα δεμένο στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου). Ασκούμε μέσω νήματος, δύναμη $\vec{F}$, παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τα κάτω, με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$, μέτρου 7,5 m/s$^2$. Το νήμα έχει όριο θραύσης $F_{\theta\rho}$ = 25N. Η δύναμη ασκείται μέχρι να σπάσει το νήμα. Ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$, λαμβάνουμε την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$.




**α.** να βρείτε την εξίσωση της δύναμης $\vec{F}$ και την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας τη στιγμή που σπάει το νήμα.

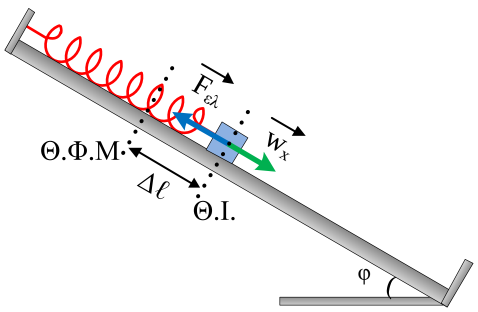
**β.** να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης

**γ.** να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας θεωρώντας θετική την φορά προς τα κάτω.

Δίνεται g = 10 m/s$^2$.

**Λύση**

**α.** Το σώμα ισορροπεί αρχικά και ισχύει Επειδή έχουμε σταθερή επιτάχυνση ισχύει: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_x \Rightarrow k\Delta\ell = mg\eta\mu\varphi$ (1).



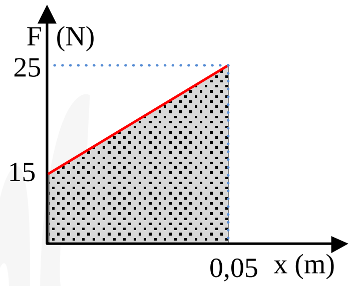

Η δύναμη $\vec{F}$ προκαλεί στο σώμα σταθερή επιτάχυνση οπότε ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow F - k(\Delta\ell + x) + mg\eta\mu\varphi = m\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$F - kx = m\alpha \Rightarrow F = kx + m\alpha \Rightarrow \mathbf{F = 200x + 15\ (S.I.)}.$$

Το νήμα σπάει όταν $F = F_{\theta\rho} \Rightarrow 200x + 15 = 25 \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}05m}$

**β.** Η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στο σύστημα μέσω του έργου της ενέργεια, η οποία είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει μετά την κατάργηση της το σύστημα.




Έχουμε: για x = 0 → F = 15 N και

για x = 0,05 → F = 25 N οπότε σχηματίζεται το διπλανό τραπέζιο.

Άρα: $E = W_F =$ εμβ.$= \frac{15+25}{2} \cdot 0,05 \Rightarrow \mathbf{E = 1\,J}$, και $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,1\,m}$.

**γ.** Η ταλάντωση μας αρχίζει τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_1$ = 0,05 m, οπότε έχουμε αρχική φάση.

Για $t_0$ = 0 έχουμε: $x = x_1 \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = x_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{x_1}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\,rad \end{matrix}$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

$$\begin{matrix} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0 \\ \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0 \end{matrix} \quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad}$$

Για την ταλάντωση αυτή ισχύει $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})}$ **(S.I.)**