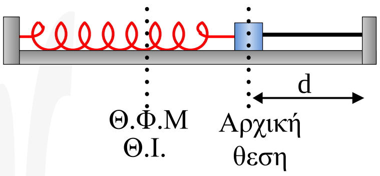
ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ – ΣΩΜΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΝΗΜΑΤΟΣ



1. Σώμα μάζας m = 1 kg, είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου (με το άλλο άκρο του σε ακλόνητο τοίχο) και από την άλλη άκρη είναι δεμένο με νήμα τεταμένο με τάση T = 20 N. Το επίπεδο είναι οριζόντιο και μόλις κόψουμε το νήμα το σώμα επιταχύνεται και απόκτα την μέγιστη του κινητική ενέργεια έπειτα από $\Delta t = \frac{\pi}{20}s$. Ένας ανιχνευτής βρίσκεται πάνω στον τοίχο και στην ευθεία ταλάντωσης του σώματος m και μετρά την απόσταση τοίχου – σώματος. Κάποιες χρονικές στιγμές η απόσταση αυτή είναι διπλάσια απ’ αυτή που είχε το σώμα πριν κόψουμε το νήμα. Να βρείτε:

α. την σταθερά του ελατηρίου k

β. την μέγιστη κινητική ενέργεια

γ. την αρχική απόσταση σώματος τοίχου

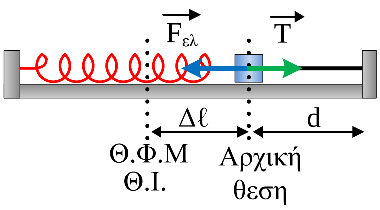
δ. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε φορά που περνά από την θέση στην οποία η απόσταση του σώματος από τον τοίχο είναι πενταπλάσια απ’ την απόσταση από τη Θ.Ι.

Λύση

α. Το σώμα ξεκινά από την ηρεμία και την μέγιστη κινητική ενέργεια την αποκτά στη Θ.Ι. που χρειάζεται χρόνο $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{20} = \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{5}s}$ επίσης $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Για την ταλάντωση ισχύει $D = k = m\omega^2 \Rightarrow$ **k = 100 N/m**.

β. Πριν κοπεί το νήμα ισχύει:

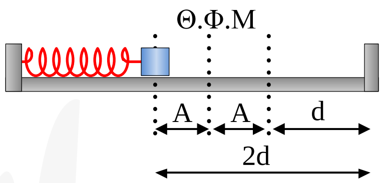


$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = T \Rightarrow k\Delta\ell = T \Rightarrow \Delta\ell = \frac{T}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,2\,m}$$

Αυτή η επιμήκυνση που έχει αρχικά το ελατήριο είναι και το πλάτος της ταλάντωσης **A = Δℓ = 0,2 m**

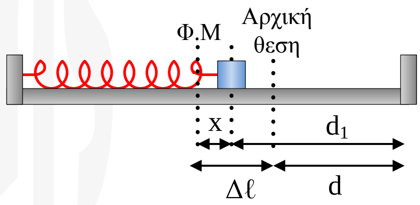
η μέγιστη ταχύτητα είναι: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 2\ m/s}$.

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow K_{max} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 \Rightarrow \mathbf{K_{max} = 2\,J} \quad ή \quad K_{max} = U_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0,04 \Rightarrow \mathbf{K_{max} = 2\,J}$$



γ. Έστω d η αρχική απόσταση σώματος τοίχου. Σύμφωνα με την εκφώνηση η απόσταση αυτή κάποιες στιγμές διπλασιάζεται και αυτό συμβαίνει όταν το σώμα κατά την διάρκεια της ταλάντωσης του βρίσκεται στο αριστερό άκρο της ταλάντωσης, άρα σύμφωνα με την εκφώνηση: $d+2A=2d \Rightarrow 2A=d \Rightarrow \mathbf{d=0,4m}$

δ. Σύμφωνα με την εκφώνηση θα πρέπει:

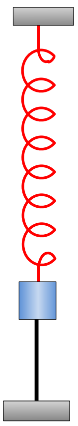


$5x = d_1$ (1) αλλά ισχύει επίσης $d_1 + x = d + \Delta\ell$ (2).

Με αντικατάσταση της (1) στη (2) έχουμε:

$$5x+x=d+\Delta\ell \Rightarrow x=\frac{d+\Delta\ell}{6} \Rightarrow x=\frac{0,4+0,2}{6} \Rightarrow \mathbf{x=0,1m}$$

Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής έχουμε: $\left|\frac{dp}{dt}\right|=|\Sigma F|=|Dx|=100\cdot 0,1 \Rightarrow \left|\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dt}}\right| = \mathbf{10\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$



2. Ελατήριο σταθεράς k = 100 N/m κρέμεται από ακλόνητο σημείο και στο ελεύθερο άκρο του φέρει σώμα μάζας m = 1 kg. Επιμηκύνουμε το ελατήριο και δένουμε το σώμα με αβαρές νήμα από το ακλόνητο δάπεδο όπως στο σχήμα. Το σώμα ισορροπεί και η τάση του νήματος μετρήθηκε, T = 10 N. Κόβουμε το νήμα τη χρονική στιγμή t_0 = 0 και το σώμα κάνει κατακόρυφες ΑΑΤ. Να υπολογιστούν:

α. Η επιμήκυνση του ελατηρίου πριν κοπεί το νήμα.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης.

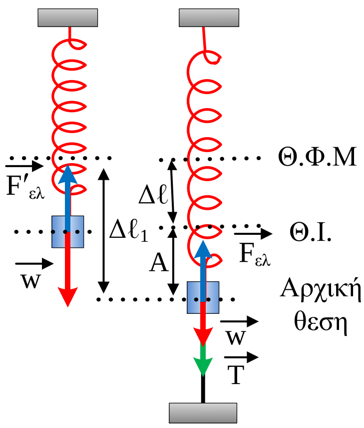
γ. Ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει το σώμα μέχρι το υψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

δ. Η εξίσωση απομάκρυνσης των ΑΑΤ, μετά την κοπή του νήματος και θετική η κατεύθυνση προς τα πάνω.

ε. Τα έργα της δύναμης επαναφοράς και της δύναμης του ελατηρίου από τη στιγμή t_0 = 0 έως να περάσει από τη θέση ισορροπίας του.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση



α. Στην αρχική ισορροπία (πριν κοπεί το νήμα) στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις όπως φαίνεται στο σχήμα. Ισχύει λοιπόν: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow$

$$F_{ελ,1} = w + T \Rightarrow k\Delta\ell_1 = mg + T \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{mg+T}{k} = \frac{10+10}{100} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1 = 0,2\,m}$$

β. Μόλις κοπεί το νήμα αλλάζει η θέση όπου ισχύει $\Sigma\vec{F} = 0$, αφού τώρα έχουμε δύο συνολικά δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα.

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{10}{100} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,1\,m}.$$

Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση από την ηρεμία έτσι η αρχική θέση είναι και η ακραία θέση της ταλάντωσης και σύμφωνα με το σχήμα έχουμε $\Delta\ell_1 = \Delta\ell + A \Rightarrow \mathbf{A = 0,1\,m}$.

γ. Το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του είναι η άλλη ακραία θέση, άρα χρειάζεται χρόνο $\Delta t = \frac{T}{2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{5}\,s} \quad \text{και τελικά} \quad \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \frac{\pi}{10}\,s}$$

δ. Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση από την μέγιστη αρνητική απομάκρυνση αφού θετική είναι η φορά προς τα πάνω. Για t = 0 έχουμε: $x=-A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0=-A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=-1 \Rightarrow \varphi_0=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \xrightarrow{0\leq\varphi_0<2\pi} \boldsymbol{\varphi_0=\frac{3\pi}{2}\,\mathbf{rad}}$

Επίσης $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega=10\,\frac{rad}{s}}$. Άρα: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x=0,1\eta\mu(10t+\frac{3\pi}{2})}$ S.I.

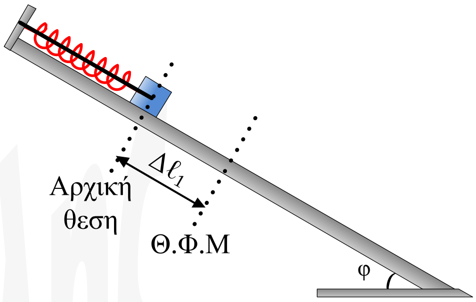
ε. Για το έργο της δύναμης επαναφοράς έχουμε:

$$W_{F_{\varepsilon\pi}}=-\Delta U=-(U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi})=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}kA^2-0=\frac{1}{2}100\cdot 0,01 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{\varepsilon\pi}}=0,5\,J}$$

και για την δύναμη του ελατηρίου

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}}=-\Delta U_{\varepsilon\lambda}=-(U^{\varepsilon\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda}-U^{\varepsilon\lambda}_{\alpha\rho\chi})=U^{\varepsilon\lambda}_{\alpha\rho\chi}-U^{\varepsilon\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2-\frac{1}{2}k\Delta\ell^2=\frac{1}{2}100\cdot 0,04-\frac{1}{2}100\cdot 0,01 \Rightarrow \mathbf{W_{F_{\varepsilon\lambda}}=1,5\,J}$$

3. Ένα σώμα Σ μάζας m ισορροπεί όπως στο σχήμα, όπου η τάση του νήματος έχει μέτρο διπλάσιο του βάρους. Η σταθερά του ελατηρίου είναι k = 200 N/m, το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο με κλίση φ = 30°, το νήμα είναι παράλληλο προς το επίπεδο και g = 10 m/s^2. Η παραμόρφωση του ελατηρίου πριν κόψουμε το νήμα είναι $\Delta\ell_1 = 0,15$ m. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα κινείται.



α. Να υπολογίσετε τη μάζα του σώματος.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος και την ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος.

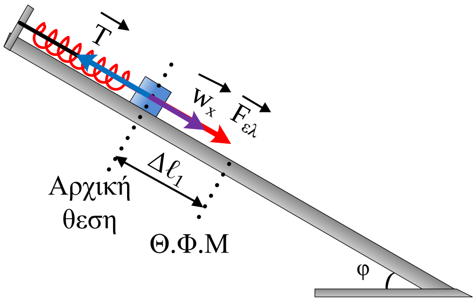
γ. Αν η μέγιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι $U_{max}^{βαρ} = 10\,J$ να βρεθεί η ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας ότι η ταλάντωση ξεκινά τη στιγμή που κόβουμε το νήμα όπου ισχύει x > 0.

ε. Ποια χρονική στιγμή απέχει για πρώτη φορά απόσταση d = 0,05 m από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου;

Λύση

α. Από το σχήμα φαίνεται ότι η αρχική θέση βρίσκεται πάνω από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου η δύναμη του ελατηρίου θα έχει κατεύθυνση προς τα κάτω όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Από την ισορροπία έχουμε:

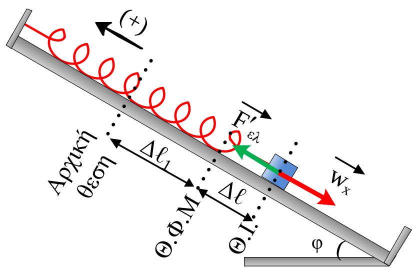
$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow T = F_{ελ} + w_x \Rightarrow 2w = k\Delta\ell_1 + wημ30 \Rightarrow 2w - \frac{w}{2} = k\Delta\ell_1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}mg = k\Delta\ell_1 \Rightarrow m = \frac{2k\Delta\ell_1}{3g} \Rightarrow m = \frac{2\cdot 200\cdot 0,15}{3\cdot 10} \Rightarrow \mathbf{m = 2kg}.$$

β. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι η θέση για την οποία ισχύει:

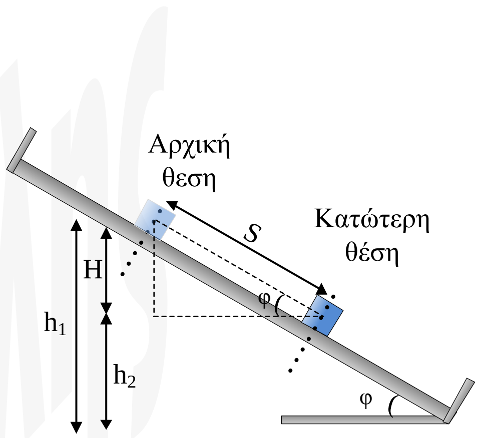
$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F'}_{ελ} + \vec{w_x} = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_x \Rightarrow k\Delta\ell = mgημφ \Rightarrow$$

$$\Delta\ell = \frac{mgημφ}{k} = \frac{2\cdot 10\cdot 0,5}{200} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,05\,m}$$



Άρα σύμφωνα με το σχήμα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = \Delta\ell_1 + \Delta\ell \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$.

Και η ενέργεια της ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \mathbf{E = 4\,J}$



γ. Την μέγιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια θα την έχει το σώμα όταν βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του άρα στην αρχική του θέση $U_{max}^{\beta\alpha\rho} = mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{U_{max}^{\beta\alpha\rho}}{mg} \Rightarrow h_1 = \frac{10}{20} \Rightarrow \mathbf{h_1 = 0,5\,m}$

Για να φτάσει το σώμα στην κατώτερη θέση θα έχει διανύσει απόσταση S = 2A = 0,4 m και σύμφωνα με το εστιγμένο τρίγωνο έχουμε: $\eta\mu\varphi = \frac{H}{S} \Rightarrow H = S\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \mathbf{H = 0,2\,m}$ οπότε $h_2 = h_1 - H \Rightarrow \mathbf{h_2 = 0,3\,m}$ και τελικά

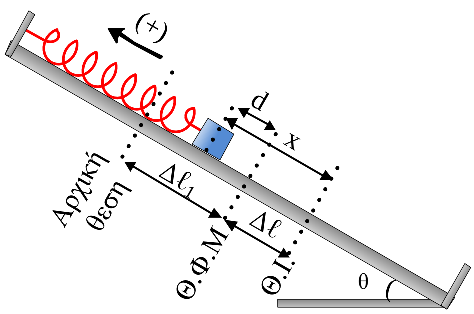
$U_{min}^{\beta\alpha\rho} = mgh_2 \Rightarrow U_{min}^{\beta\alpha\rho} = 2\cdot 10\cdot 0,3 \Rightarrow \mathbf{U_{min}^{\beta\alpha\rho} = 6\,J}$

Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι: $W_w = -\Delta U^{\beta\alpha\rho} \Rightarrow mgH = U_{max}^{\beta\alpha\rho} - U_{min}^{\beta\alpha\rho} \Rightarrow 4 = 10 - U_{min}^{\beta\alpha\rho} \Rightarrow \mathbf{U_{min}^{\beta\alpha\rho} = 6\,J}$

δ. Η ταλάντωση ξεκινά από το θετικό άκρο οπότε έχουμε αρχική φάση.

$$x = +A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad}$$

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$$ και τελικά $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})\ (S.I.)}$



ε. Το σώμα αρχικά απέχει από τη Θ.Φ.Μ. $\Delta\ell_1$ = 0,15 m οπότε θα βρίσκεται πάνω από τη Θ.Φ.Μ. όταν θα απέχει d = 0,05 m και σύμφωνα με το σχήμα θα απέχει από τη Θ.Ι. x = d + Δℓ =0,1 m. Άρα

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0,1 = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{12k\pi - 2\pi}{60}s \\ t = \frac{12k\pi + 2\pi}{60}s \end{array}$$

Άρα για πρώτη φορά: $\boldsymbol{t = \frac{2\pi}{60}s = \frac{\pi}{30}s}$