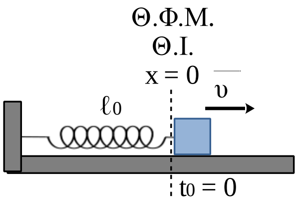
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

1. Ένα σώμα μάζας m = 2 kg βρίσκεται πάνω σε λείο δάπεδο και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Τη χρονική στιγμή t = 0 εκτοξεύουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 4 m/s και με φορά προς τα δεξιά.



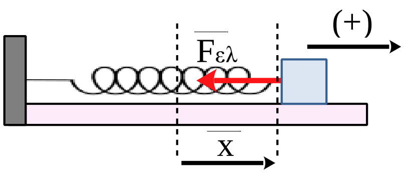
α. Να αποδείξετε ότι το σώμα μετά την εκτόξευση του θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος A της ταλάντωσης.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας εκτόξευσης.

Λύση

α. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, δε δέχεται δυνάμεις στη διεύθυνση της κίνησης του (οι κατακόρυφες δυνάμεις δεν έχουν σχεδιαστεί). Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος ταυτίζεται με τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.



Σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. του το σώμα στη διεύθυνση της κίνησης του δέχεται μόνο τη δύναμη από το ελατήριο. Έχουμε: $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$

Θεωρούμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης x που σχεδιάσαμε. Άρα $\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} = -kx = -Dx$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής ΣF = –Dx, συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς **D = k**.

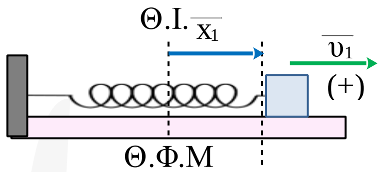
β. Τη χρονική στιγμή t = 0 που αρχίζει η ταλάντωση το σώμα εκτοξεύεται από τη θέση ισορροπίας του με οριζόντια ταχύτητα μέτρου 4 m/s, αλλά στη Θ.Ι. ισχύει $|\upsilon| = \upsilon_{max} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 4\ m/s}$.

Ισχύει: $D = m\omega^2 \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{200}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\dfrac{rad}{s}}$

Άρα $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \dfrac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \dfrac{4}{10} \Rightarrow \mathbf{A = 0,4\,m}$

γ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου χωρίς αρχική φάση: Άρα $x = Aημωt \Rightarrow$ $\mathbf{x = 0{,}4ημ10t}$ **(S.I.)**

2. Το σώμα μάζας m = 1 kg του διπλανού σχήματος βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Εκτρέπουμε οριζόντια το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά x_1 = 0,2 m και τη χρονική στιγμή t = 0 το εκτοξεύουμε από τη θέση αυτή με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 2\sqrt{3}$ m/s, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα μετά την εκτόξευση του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας εκτόξευσης, να υπολογίσετε:



α. το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος,

β. την αρχική φάση της ταλάντωσης του.

γ. Την χρονική εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου.

Λύση

α. Η ταλάντωση του σώματος αρχίζει τη χρονική στιγμή t = 0 με την εκτόξευση του. Αυτή τη χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση απομάκρυνσης x_1, έχοντας ταχύτητα $υ_1$. Για να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την απλή αρμονική ταλάντωση. Είναι:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{mυ_1^2}{k} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1\cdot 12}{100} + 0,04} \Rightarrow \mathbf{A = 0,4m}$$

β. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα δε διέρχεται από τη Θ.Ι. του με υ > 0. Επομένως η ταλάντωση του έχει αρχική φάση και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας έχει τη μορφή:

$x = Αημ(ωt + φ_0)$

Για να βρούμε την αρχική φάση, θέτουμε στη χρονική εξίσωση $x = Αημ(ωt + φ_0)$ όπου t = 0 και όπου $x = x_1$.

$$\text{Άρα: } 0,2 = 0,4ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} φ_0 = 2kπ + \frac{π}{6} \\ φ_0 = 2kπ + \frac{5π}{6} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le φ_0 < 2π} \begin{matrix} φ_0 = \frac{π}{6} \\ φ_0 = \frac{5π}{6} \end{matrix}$$

Επειδή τη στιγμή t = 0 η ταχύτητα του σώματος είναι θετική, πρέπει και η χρονική εξίσωση της ταχύτητας για t = 0 να δίνει υ > 0.

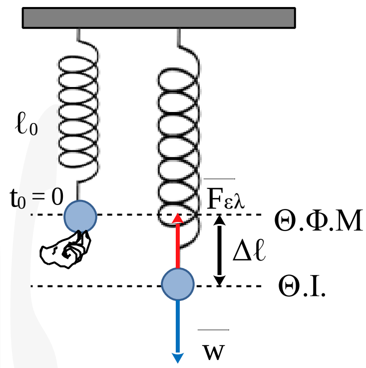
$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ και $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$ Άρα η δεκτή φάση είναι $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}}$.

γ. Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})}$ **(S.I.)**

Η συνισταμένη δύναμη για την ταλάντωση είναι:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = -100 \cdot 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\lambda} = -40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I)}$$



3. Σώμα μάζας m = 2 kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεμένο στην οροφή. Το σώμα αρχικά ισορροπεί ακίνητο με το ελατήριο επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετακινούμε το σώμα με τη βοήθεια κατακόρυφης μεταβλητής δύναμης $\vec{F}$ από τη θέση ισορροπίας του μέχρι τη θέση, όπου το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, και από τη θέση αυτή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 0.

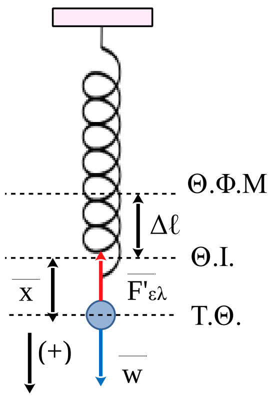
α. Να αποδείξετε ότι το σώμα από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο και μετά θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και στη συνέχεια να υπολογίσετε την περίοδό της.

β. Να υπολογίσετε την ενέργεια που προσφέραμε στο σύστημα, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του μέχρι τη θέση Φ.Μ.

γ. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του θεωρώντας ως θετική τη φορά της αρχικής εκτροπής.

δ. Να υπολογίσετε την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσής του.

Λύση



α. Για να αποδείξουμε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, εξετάζουμε αρχικά το σώμα και τις δυνάμεις που αυτό δέχεται όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma\vec{F}=0$) για τη θέση ισορροπίας του σώματος προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \overrightarrow{F_{ελ}}+\vec{w}=0 \Rightarrow F_{ελ}=mg \Rightarrow k\Delta\ell=mg \ (1)$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια το σώμα και τις δυνάμεις που δέχεται σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. του (θετική επιλέγω τη φορά προς τα κάτω).

Έχουμε: $\Sigma\vec{F}=\overrightarrow{F_{ελ}}+\vec{w} \Rightarrow \Sigma F = F_{ελ}-w = k(\Delta\ell - x) - mg \overset{(1)}{=} k\Delta\ell - kx - k\Delta\ell \Rightarrow \Sigma F = -kx = -Dx$

Άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς **D = k**

Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{5}\,s}$$

β. Το σώμα όπως αποδείξαμε θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με αρχική φάση φ_0 αφού τη χρονική στιγμή t = 0 δεν βρίσκεται στη Θ.Ι. Η ταλάντωση του σώματος ξεκινά με μηδενική ταχύτητα, άρα η Θ.Φ.Μ. αποτελεί την μία από τις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, οπότε **Δℓ = Α**. Από την (1) υπολογίζουμε την παραμόρφωση που έχει το ελατήριο όταν βρίσκεται στη Θ.Ι. $(1) \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0{,}1\,m}$

Άρα και **Α = Δℓ = 0,1 m**. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}01 \Rightarrow \mathbf{E = 1\,J}$

Αρχικά το σύστημα δεν ταλαντωνόταν, οπότε δεν είχε ενέργεια ταλάντωσης. Στη συνέχεια, μέσω της μεταβλητής δύναμης F, προσφέραμε ενέργεια στο σύστημα και αυτό ξεκίνησε να ταλαντώνεται με ενέργεια ταλάντωσης Ε. Άρα η ενέργεια που προσφέραμε είναι και η ενέργεια της ταλάντωσης $\mathbf{W_F = E = 1\,J}$

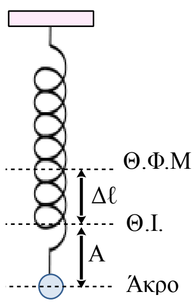
γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$

Την χρονική στιγμή t = 0 έχουμε: $x = +A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = A \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad}$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης είναι $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 1\,m/s}$. Άρα

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{2})}\ \ \mathbf{(S.I.)}$$

δ. Η κατώτερη θέση της ταλάντωσης απέχει από τη Θ.Ι. απόσταση όση και το πλάτος της ταλάντωσης, δηλαδή η παραμόρφωση του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή είναι:

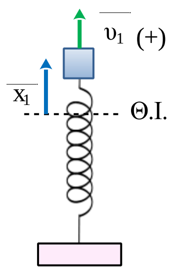


$$\Delta\ell' = A + \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell' = 0{,}1 + 0{,}1 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell' = 0{,}2\,m}$$

Και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell'^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0{,}04 \Rightarrow \mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 2\,J}$$

4. Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m είναι δεμένο σώμα μάζας m = 2 kg, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Το σώμα αρχικά ισορροπεί ακίνητο με το ελατήριο συμπιεσμένο κατά $\Delta\ell$ σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Μετατοπίζουμε το σώμα προς τα πάνω κατά x_1 από τη θέση ισορροπίας του και από τη θέση αυτή το εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = \sqrt{3}$ m/s, οπότε το σώμα αρχίζει να εκτελεί κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A = 0,2 m.



α. Να υπολογίσετε την αρχική μετατόπιση x_1 του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς, θεωρώντας ως t = 0 τη στιγμή της εκτόξευσης και ως θετική φορά τη φορά της ταχύτητας εκτόξευσης.

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη κατά μέτρο δύναμη που δέχεται το σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του.

δ. Ποια χρονική στιγμή το σώμα περνά για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης;

Λύση

α. Η ταλάντωση του σώματος αρχίζει τη στιγμή της εκτόξευσης του. Τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = +x_1$ από τη θέση ισορροπίας του, έχοντας ταχύτητα $\upsilon = +\upsilon_1$. Επειδή κατά τη διάρκεια της απλής αρμονικής ταλάντωσης η ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή, έχουμε:

$$E = K_1 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{A^2 - \frac{m\upsilon_1^2}{k}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{0,04 - \frac{2\cdot 3}{200}} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,1m}$$

β. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα δε διέρχεται από τη Θ.Ι. του με θετική ταχύτητα. Επομένως η ταλάντωση του έχει αρχική φάση και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Ισχύει: $D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$

Για να βρούμε την αρχική φάση, θέτουμε στην παραπάνω χρονική εξίσωση όπου t = 0 και $x = x_1$. Άρα:

$$0,1 = 0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi} \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \end{array}$$

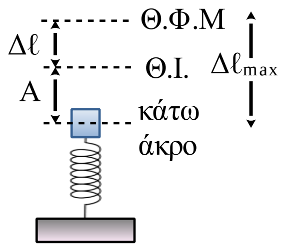
Επειδή τη στιγμή t = 0 η ταχύτητα του σώματος είναι θετική, πρέπει και η χρονική εξίσωση της ταχύτητας για t = 0 να δίνει υ > 0.

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ και $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$ Άρα η δεκτή φάση είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Άρα έχουμε: $\mathbf{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})}$ **(S.I.) και**

$$\Sigma F = -Dx = -200 \cdot 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.).}$$

γ. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta\ell_{max}$, όπου $\Delta\ell_{max}$ η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη παραμόρφωση του όταν το σώμα φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Στη Θ.Ι. της ταλάντωσης έχουμε:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{2 \cdot 10}{200} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0{,}1\,m}$$

Άρα $\Delta\ell_{max} = \Delta\ell + A \Rightarrow \Delta\ell_{max} = 0{,}1 + 0{,}2 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_{max} = 0{,}3\ m.}$

Άρα: $F_{\varepsilon\lambda,\,max} = k\Delta\ell_{max} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,\,max} = 200 \cdot 0{,}3 \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\lambda,\,max} = 60\ N}$.

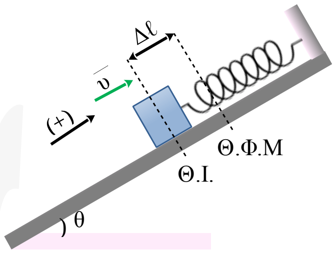
Την μέγιστη δύναμη του ελατηρίου μπορούμε να την υπολογίσουμε και από χρονοεξίσωση της δύναμης επαναφοράς. $\Sigma F = -40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = -40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20 - 40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.)

Άρα όταν το ημίτονο πάρει την τιμή –1 έχουμε την μέγιστη τιμή για την δύναμη του ελατηρίου $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda,max} = 60\ N.}$

δ. Στη Θ.Ι. έχουμε $x = 0 \Rightarrow 0 = 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow 10t + \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow t = \frac{6k\pi - \pi}{60}$ (S.I.)

Άρα για πρώτη φορά $t = \frac{5\pi}{60} \Rightarrow \mathbf{t = \frac{\pi}{12} s}$.

5. Στο διπλανό σχήμα, το ένα άκρο του ελατηρίου σταθεράς k = 200 N/m είναι ακλόνητα στερεωμένο, ενώ στο άλλο άκρο του έχει συνδεθεί σώμα μάζας m = 2 kg, το οποίο ισορροπεί ακίνητο πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30^o$. Τη χρονική στιγμή t = 0 εκτοξεύουμε το σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου 2 m/s και με φορά προς τα πάνω, την οποία θεωρούμε ως θετική, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσής του.

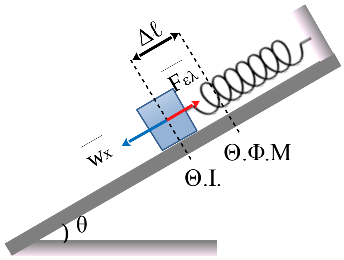
β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

γ. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή της εκτόξευσης το σώμα θα βρεθεί στη θέση όπου το ελατήριο θα έχει για πρώτη φορά τη μέγιστη επιμήκυνση του.

δ. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης επαναφοράς όταν το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell' =$ 0,2 m.

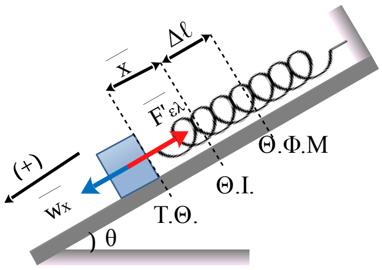
Λύση

α. Για να αποδείξουμε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, εξετάζουμε αρχικά το σώμα και τις δυνάμεις που δέχεται όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, όπου το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$. Σχεδιάζουμε και αναλύουμε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα στη θέση αυτή και εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ($\Sigma\vec{F}=0$):



$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w_x \Rightarrow k\Delta\ell = w_x \quad (1)$$

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. του (Δεν είναι απαραίτητο για την απόδειξη της Α.Α.Τ. να ακολουθήσουμε την θετική φορά που ορίζει το σώμα για την γραφή των χρονοεξισώσεων).



Θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά της τυχαίας απομάκρυνσης x έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}+\vec{w}_x \Rightarrow \Sigma F = w_x - F'_{\varepsilon\lambda} \overset{(1)}{=} k\Delta\ell - k(\Delta\ell + x) = -kx = -Dx$$

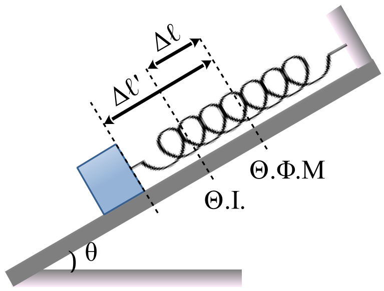
Αφού η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι της μορφής ΣF = –Dx, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με **D = k = 200 N/m**.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

β. Το σώμα εκτοξεύεται από τη θέση ισορροπίας του. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του. Άρα: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$

γ. Το ελατήριο επιμηκύνεται μέγιστα τις χρονικές στιγμές που το σώμα το οποίο ταλαντώνεται φτάνει στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση (x = –A). Συνεπώς ζητάμε τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα θα φτάσει για πρώτη φορά στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα εκτοξεύεται από τη Θ.Ι. του (x = 0) με θετική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι, για να φτάσει το σώμα στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση για πρώτη φορά μετά την εκτόξευση του, χρειάζεται χρόνο: $\Delta t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,15\pi\ s}$

δ. Η δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο |ΣF| = |Dx|, όπου x η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. η οποία δεν ταυτίζεται με την παραμόρφωση του ελατηρίου. Στη Θ.Ι. το ελατήριο έχει επιμήκυνση που υπολογίζεται από την (1).

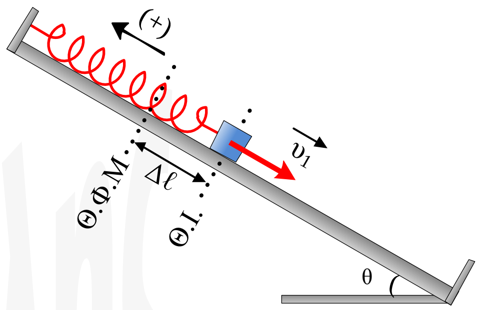


$(1) \Rightarrow k\Delta\ell = mg\eta\mu\theta \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,05\,m}$.

Άρα η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. είναι:

$x = \Delta\ell' - \Delta\ell \Rightarrow x = 0,2 - 0,05 \Rightarrow \mathbf{x = 0,15\,m}$.

Άρα: |ΣF| = |200·0,15| ⇒ **|ΣF| = 30 N.**



6. Σώμα μάζας m = 2 kg ισορροπεί ακίνητο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ = 30°, δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k, το οποίο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$ = 0,2 m. Τη χρονική στιγμή t = 0 εκτοξεύουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα μέτρου υ_1 και με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα, οπότε αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A = 0,4 m.

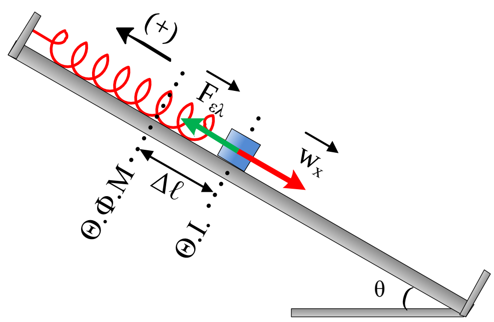
α. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης καθώς και το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης,

β. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω, και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σε βαθμολογημένους άξονες.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει για πρώτη φορά μετά την εκτόξευση του στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s^2.

Λύση



α. Στη Θ.Ι. το σώμα δέχεται τη δύναμη του ελατηρίου, το βάρος του και την κάθετη αντίδραση του δαπέδου. Στη θέση αυτή ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_x \Rightarrow k\Delta\ell = w_x \Rightarrow k\Delta\ell = mg\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$k = \frac{mg\eta\mu\theta}{\Delta\ell} \Rightarrow \mathbf{k = 50\frac{N}{m}}$$

Η σταθερά του ελατηρίου ισούται με τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης. Συνεπώς: **D = k = 50N/m**

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\frac{rad}{s}}$

Αφού το σώμα εκτοξεύεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί, το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

Δηλαδή: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = 5 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 2\ m/s}$

β. Οι ζητούμενες χρονικές εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ και $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα εκτοξεύεται από τη Θ.Ι της ταλάντωσης του. Συνεπώς την t = 0 το σώμα βρίσκεται στη Θ.Ι του, αλλά η ταχύτητα του είναι αρνητική (αφού το σώμα εκτοξεύεται με αντίθετη φορά από τη θετική). Συνεπώς έχει αρχική φάση

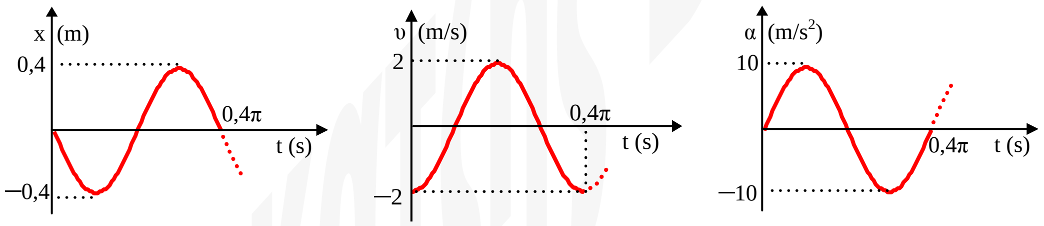
Την t = 0 είναι $\upsilon = -\upsilon_{max} \Rightarrow \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\upsilon_{max} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \pi}$ **rad**

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\pi\,s}$

και $\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{max}} = \mathbf{10\ m/s^2}$.

Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι: **x = 0,4ημ(5t + π) (S.I.), υ = 2συν(5t + π) (S.I.), α = –10ημ(5t + π) (S.I.)**

Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



γ. Η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου απέχει από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης απόσταση $\Delta\ell = 0,2$m.

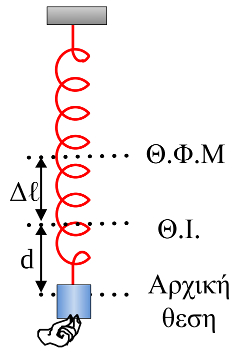
Επειδή η θετική φορά είναι προς τα πάνω, τη στιγμή που το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η απομάκρυνση του από τη Θ.Ι. του ισούται με $x_1 = 0,2$ m.

Για να βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση x_1, θέτουμε αυτή την τιμή στην χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης και έχουμε:

$$0,2 = 0,4\eta\mu(5t+\pi) \Rightarrow \eta\mu(5t+\pi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5t+\pi = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 5t+\pi = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \dfrac{12k\pi - 5\pi}{30}s \\ t = \dfrac{12k\pi - \pi}{30}s \end{array}$$

Άρα για πρώτη φορά: $\mathbf{t = \dfrac{7\pi}{30}s}$

7. Ένα σώμα μάζας m = 4 kg ισορροπεί ακίνητο, δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 400 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στην οροφή. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d = 0,2 m και με φορά προς τα κάτω και τη χρονική στιγμή t = 0 το αφήνουμε ελεύθερο χωρίς ταχύτητα από τη θέση όπου το εκτρέψαμε. Το σώμα μετά την απελευθέρωση του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση,



α. Να υπολογίσετε την ενέργεια που ξοδέψαμε για την εκτροπή του σώματος κατά d από τη θέση ισορροπίας του.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του, θεωρώντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.

γ. Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{15}\text{s}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Λύση

α. Αφού το σώμα ήταν αρχικά ακίνητο στη Θ.Ι του, η ενέργεια που ξοδέψαμε για την εκτροπή του από τη Θ.Ι. ώστε να ξεκινήσει η ταλάντωση του ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης.

Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου (D = k = 400 N/m).

Το πλάτος Α της ταλάντωσης ισούται με την κατακόρυφη εκτροπή d (A = d = 0,2 m). Αυτό συμβαίνει διότι το σώμα το αφήσαμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς ταχύτητα από τη θέση όπου το εκτρέψαμε, άρα η θέση αυτή είναι ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επομένως: $W = E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 400\cdot 0,04 \Rightarrow \mathbf{W = 8\,J}$

β. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Για τη γωνιακή συχνότητα έχουμε: $D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$

Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα βρίσκεται στην αρνητική ακραία του θέση οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}$ **rad**

Επομένως: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ **(S.I.)**

Η συνισταμένη δύναμη ΣF που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του και η απομάκρυνση x από τη θέση Ισορροπίας του συνδέονται με τη σχέση:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow \Sigma F = -400 \cdot 0,2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -80\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}\ \mathbf{(S.I.)}$$

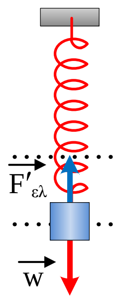
γ. Για να βρούμε τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1, πρέπει να βρούμε την απομάκρυνση x_1 του σώματος από τη Θ.Ι. του την ίδια χρονική στιγμή.

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu(10\frac{\pi}{15} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu(\frac{13\pi}{6}) \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0,1m}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 0,01 \Rightarrow U = 2\,J$$

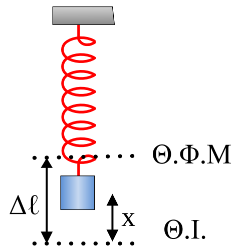
Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_1^2$ όπου $\Delta\ell_1$ η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου (η οποία μετριέται από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου).



Αφού τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση x_1 = 0,1 m, η επιμήκυνση του ελατηρίου τη χρονική αυτή στιγμή είναι: $\Delta\ell_1 = \Delta\ell - x_1$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

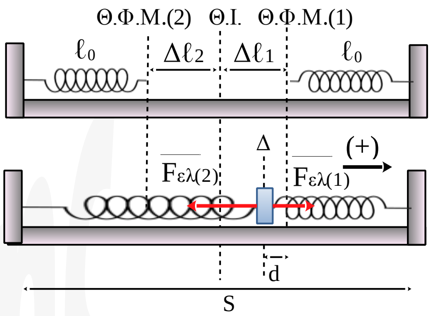
Για να βρούμε την απόσταση $\Delta\ell$ της Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου και της Θ.Ι. της ταλάντωσης, εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τη Θ.Ι.:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F_{\varepsilon\lambda}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w \Rightarrow k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{mg}{k} \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell = 0,1m}$$



Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών προκύπτει: $\Delta\ell_1$ = 0,1 – 0,1 = 0. Δηλαδή βρισκόμαστε στη Θ.Φ.Μ. και το ελατήριο δεν έχει υποστεί παραμόρφωση, άρα: $\mathbf{U_{\varepsilon\lambda} = 0}$.

8. Στο διπλανό σχήμα το σώμα Σ μάζας m = 1 kg ισορροπεί ακίνητο, δεμένο σε δύο ελατήρια με σταθερές k_1 = 150 N/m και k_2 = 250 N/m, τα οποία έχουν φυσικό μήκος ℓ_0 = 0,6 m. Η απόσταση των δύο οριζοντίων τοιχωμάτων είναι S = 2 m. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα δεξιά πάνω στο λείο οριζόντιο δάπεδο ώσπου το ελατήριο σταθεράς k_1 να έχει επιμήκυνση d = 0,1 m (θέση Δ) και τη χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα.



α. Να υπολογίσετε τις παραμορφώσεις που έχουν τα δύο ελατήρια όταν το σώμα Σ βρίσκεται στη Θ.Ι. του.

β. Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

γ. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που το ελατήριο σταθεράς k_2 θα συσπειρωθεί για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t = 0 κατά d = 0,1 m.

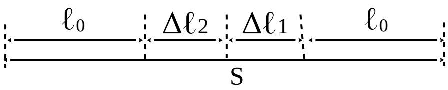
δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή t_2 που το ελατήριο σταθεράς k_2 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος για πρώτη φορά.

Λύση

α. Στη Θ.Ι. έχουμε: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ,1}+\vec{F}_{ελ,2}=0 \Rightarrow F_{ελ,1}=F_{ελ,2} \Rightarrow k_1\Delta\ell_1=k_2\Delta\ell_2$ (1)

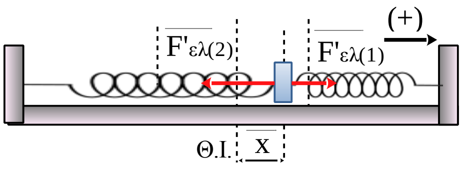
$k_1\Delta\ell_1=k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow 150\Delta\ell_1=250\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2=0,6\Delta\ell_1$

Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε:



$S=\ell_0+\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\ell_0 \Rightarrow S=2\ell_0+\Delta\ell_1+0,6\Delta\ell_1 \Rightarrow 2=1,2+1,6\Delta\ell_1 \Rightarrow \mathbf{\Delta\ell_1=0,5\,m}$ άρα και $\mathbf{\Delta\ell_2 = 0,3\ m}$.

β. Για να αποδείξουμε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ που δέχεται το σώμα και η απομάκρυνση του x από τη Θ.Ι. του ικανοποιούν τη σχέση ΣF = –Dx. Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε μια τυχαία θέση απομάκρυνσης x από τη Θ.Ι. και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη για τη θέση αυτή.



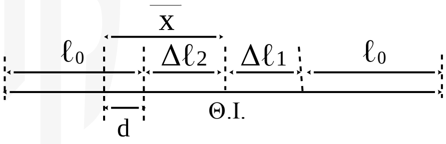
Θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά σε τυχαία θέση απομάκρυνσης x έχουμε:

$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda,1} - F'_{\varepsilon\lambda,2} = k_1(\Delta\ell_1 - x) - k_2(\Delta\ell_2 + x) = k_1\Delta\ell_1 - k_1x - k_2\Delta\ell_2 - k_2x \overset{(1)}{=} -(k_1 + k_2)x = -Dx$$

Δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής ΣF = –Dx. Επομένως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\mathbf{D = k_1 + k_2 = 400\ N}$.

γ. Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του με μηδενική ταχύτητα. Συνεπώς η θέση (Δ) είναι ακραία θέση της ταλάντωσης του, οπότε $\mathbf{A = \Delta\ell_1 - d = 0{,}4\ m}$.

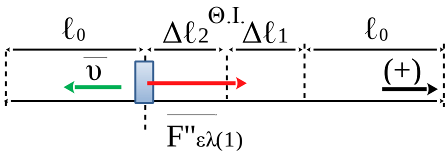
Τη χρονική στιγμή t_1 που θα συσπειρωθεί το ελατήριο k_2 κατά d το σώμα Σ φτάνει για πρώτη φορά μετά την t = 0 στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του, αφού θα απέχει από τη Θ.Ι. $\mathbf{x = \Delta\ell_2 + d = 0{,}4\ m = A}$.



Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί από τη μια ακραία θέση στην άλλη ισούται με $\frac{T}{2}$. Άρα:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400}} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{\pi}{10}\,s}, \text{ οπότε } \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \frac{\pi}{20}\,s}$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ υπολογίζεται ως εξής:



$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} \ (2)$$

Αφού το ελατήριο σταθεράς k_2 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος η μόνη δύναμη στην διεύθυνση της κίνησης που δέχεται το σώμα είναι αυτή από το ελατήριο σταθεράς k_1 (το οποίο θα έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα) , ενώ για πρώτη φορά σ' αυτή τη θέση θα φτάσει με αρνητική ταχύτητα.

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\Delta\ell_2^2 \Rightarrow \upsilon = -\omega\sqrt{A^2 - \Delta\ell_2^2} \Rightarrow \upsilon = -20\sqrt{0{,}16 - 0{,}09} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = -2\sqrt{7}\ m}$$

Άρα από τη (2) $\Rightarrow \frac{dK}{dt} = k_1(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2)\cdot\upsilon = 150\cdot 0{,}8\cdot(-2\sqrt{7}) \Rightarrow \mathbf{\frac{dK}{dt} = -240\sqrt{7}\ \frac{J}{s}}$