ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΦΑΣΗΣ

1. Η απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί ένα μικρό σώμα μάζας m = 1 kg έχει πλάτος A = 20 cm και συχνότητα f = 5 Hz. Τη χρονική στιγμή t = 0 το μικρό σώμα διέρχεται από τη θέση απομάκρυνσης $x = 10\sqrt{3}$ cm κινούμενο προς τη θέση ισορροπίας του.

α. Να υπολογίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης του σώματος.

β. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος.

γ. Ποια χρονική στιγμή θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας με τα τη χρονική στιγμή t = 0.

δ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη στιγμή που διέρχεται το σώμα από τη θέση x = 10 cm επιταχυνόμενο.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

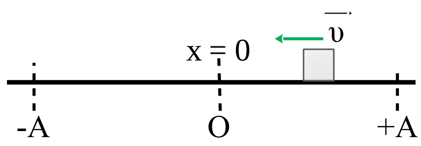
Λύση

α. Το μικρό σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δε διέρχεται τη χρονική στιγμή t = 0 από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η ταλάντωση του σώματος έχει αρχική φάση και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ θέτοντας τις αρχικές συνθήκες t = 0, $x = 10\sqrt{3}$ παίρνουμε:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 10\sqrt{3} = 20\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{cases} \varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}\ \text{rad} \\ \varphi_0 = \dfrac{2\pi}{3}\ \text{rad} \end{cases}$$

Εφόσον την χρονική στιγμή t = 0 το σώμα κινείται προς τη Θ.Ι. βρισκόμενο στον θετικό ημιάξονα σημαίνει ότι η ταχύτητα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή ($\upsilon < 0$). Άρα για t = 0:



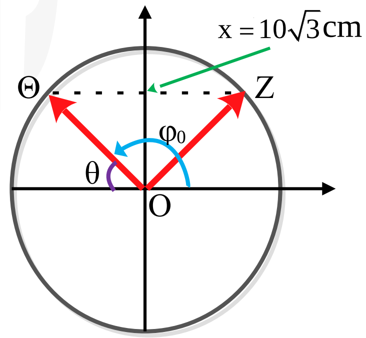
$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} > 0$$
$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} < 0$$

άρα η αρχική φάση είναι $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}}$ **rad**.

Στο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε με την μέθοδο του περιστρεφόμενου διανύσματος.

Θεωρούμε σύστημα ορθογώνιων αξόνων με αρχή το σημείο Ο και ένα διάνυσμα το οποίο έχει αρχή το Ο, μέτρο ίσο με το πλάτος Α της ταλάντωσης και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω έχοντας αντίθετη φορά από αυτή της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Το πέρας του περιστρεφόμενου διανύσματος διαγράφει κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ίση με το πλάτος Α της ταλάντωσης.

Η προβολή του άκρου του περιστρεφόμενου διανύσματος στον κατακόρυφο άξονα (άξονας προβολών) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (βλέπε διπλανό σχήμα).



Για να βρούμε τη θέση του διανύσματος τη χρονική στιγμή t = 0 που το σώμα διέρχεται από τη θέση απομάκρυνσης $x = 10\sqrt{3}$ m με αρνητική ταχύτητα (υ < 0), παίρνουμε στο θετικό ημιάξονα των προβολών μήκος ίσο με $10\sqrt{3}$ m και φέρνουμε ευθεία κάθετη στο σημείο Γ. Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Θ και επομένως οι δύο πιθανές θέσεις του περιστρεφόμενου διανύσματος τη χρονική στιγμή t = 0 είναι η $\overrightarrow{ΟΖ}$ και η $\overrightarrow{ΟΘ}$. Επειδή όμως το σώμα την ίδια στιγμή κινείται προς τη θέση ισορροπίας του (υ < 0), η σωστή θέση του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι η $\overrightarrow{ΟΘ}$. Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΘ}$ με τον οριζόντιο θετικό ημιάξονα (άξονας φάσεων) είναι η αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης. Από το σχήμα έχουμε: $ημθ = \frac{x}{A} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow θ = \frac{\pi}{3}$rad

Η γωνία θ είναι οξεία γωνία και έτσι επιλέγουμε απευθείας τη λύση που αντιστοιχεί $0 \le θ \le \pi/2$ rad.

Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε: $\varphi_0 = \pi - θ \Rightarrow \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}}$ **rad**

β. Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\pi \frac{rad}{s}}$.

Τα πλάτη ταχύτητας και επιτάχυνσης είναι:

$$υ_{max} = \omega A = 10\pi \cdot 0,2 \Rightarrow \boldsymbol{υ_{max} = 2\pi \frac{m}{s}} \quad και \quad α_{max} = \omega^2 A = 100\pi^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boldsymbol{α_{max} = 200 \frac{m}{s^2}}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:

$$x = Aημ(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 0,2ημ(10\pi t + \frac{2\pi}{3})} \ \ \textbf{(S.I.)}$$

Οι χρονικές εξισώσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος είναι αντίστοιχα:

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2\pi \cdot \eta\mu(10\pi t + \frac{2\pi}{3})} \ \ \textbf{(S.I.)}$$

$$\alpha = \alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 200 \cdot \eta\mu(10\pi t + \frac{2\pi}{3})} \ \ \textbf{(S.I.).}$$

γ. Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να λύσουμε την χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης.

$$\Theta.\text{Ι. άρα } x = 0 \Rightarrow \ 0 = 0,2\eta\mu(10\pi t + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow 10\pi t + \frac{2\pi}{3} = k\pi \Rightarrow 30t + 2 = 3k \Rightarrow \mathbf{t = \frac{3k - 2}{30}\ s}$$

Άρα για πρώτη φορά έχουμε $\mathbf{t = \frac{1}{30} s}$ (για k = 1)

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx \cdot \upsilon \ \ (1)$$

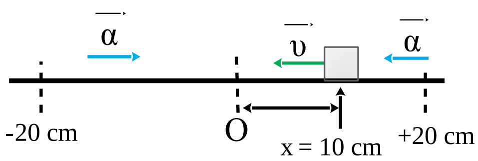
Από τη σχέση (1) βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε την ταχύτητα του σώματος στη θέση x = 10 cm.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow \omega^2 A^2 = \upsilon^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \upsilon = \pm 2\pi\sqrt{0,04 - 0,01}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm 0,2\sqrt{3}\pi \frac{m}{s}}.$$

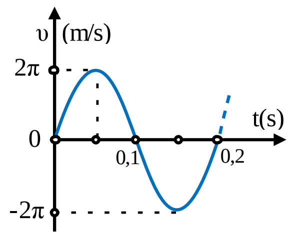
Στην παραπάνω θέση το σώμα περνά επιταχυνόμενο. Ένα ταλαντούμενο σώμα επιταχύνεται όταν κατευθύνεται προς τη Θ.Ι. της ταλάντωσης και επειδή βρισκόμαστε στον θετικό ημιάξονα η ταχύτητα είναι αρνητική σύμφωνα με το διπλανό σχήμα. Άρα $\boldsymbol{\upsilon = -0,2\sqrt{3}\pi \frac{m}{s}}$.



Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 1 \cdot (10\pi)^2 \Rightarrow D = 1000$ N/m.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει: $\frac{dK}{dt} = -1000 \cdot (0,1)(-0,2\sqrt{3}\pi) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK}{dt} = 20\sqrt{3}\pi \ \frac{J}{s}}$

2. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας m = 0,4 kg το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



α. Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

β. Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με το χρόνο και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

δ. να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{12}s$

Θεωρήστε για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Από το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου της εκφώνησης έχουμε ότι: $\boldsymbol{\upsilon_{max} = 2\pi}$ **m/s** και **T = 0,2 s.**

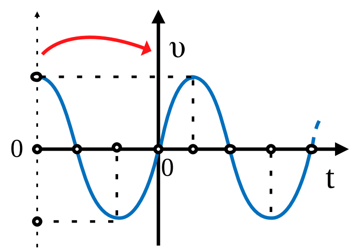
Επίσης, από το διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 είναι υ = 0 οπότε συμπεραίνουμε ότι η ταλάντωση μας έχει αρχική φάση (αφού θα έπρεπε t = 0 και $\upsilon = +\upsilon_{max}$ για να έχουμε $\varphi_0 = 0$).

Σύμφωνα με το διάγραμμα η εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής $\upsilon = \upsilon_{max}\eta\mu\omega t = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{3\pi}{2})$

Άρα η αρχική φάση είναι $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}$ **rad**.

Θα μπορούσαμε να βρούμε την αρχική φάση ως εξής:

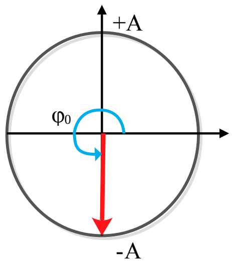
Από το διάγραμμα της ταχύτητας με μηδενική αρχική φάση για να ταυτιστεί με το δοθέν θα πρέπει να περάσει χρόνος $\Delta t = \frac{3T}{4}$ όπως στο σχήμα. Αυτός ο χρόνος αντιστοιχεί σε φάση:



$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}\ \textbf{rad}.$$

Εναλλακτικά έχουμε και τη **μέθοδο του στρεφόμενου διανύσματος.**

Θωρούμε περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκους ίσο με το πλάτος Α της ταλάντωσης, το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω. Η προβολή του άκρου του περιστρεφόμενου διανύσματος στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Αφού την t = 0 το σώμα βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση, το περιστρεφόμενο διάνυσμα την ίδια στιγμή θα βρίσκεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς η αρχική φάση είναι η: $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}}$ **rad**

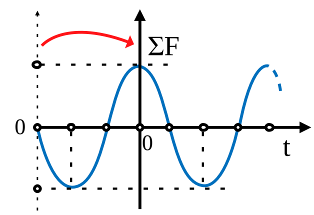


β. Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\pi \frac{rad}{s}}$

Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,4 \cdot 100\pi^2 \Rightarrow \mathbf{D = 400\ \frac{N}{m}}$$

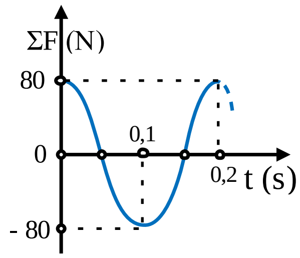
γ. Γνωρίζουμε ότι η δύναμη επαναφοράς (συνισταμένη δύναμη) σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση ΣF = –Dx. Για να βρούμε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης, πρέπει να αντικαταστήσουμε στον τύπο αυτό τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης. Είναι: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{10\pi}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$



Άρα $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,2\eta\mu(10\pi t + \frac{3\pi}{2})}$ **(S.I.)**

Άρα: $\Sigma F = -Dx \Rightarrow \Sigma F = -400 \cdot 0,2\eta\mu(10\pi t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -80\eta\mu(10\pi t + \frac{3\pi}{2})}$ **(S.I.)**

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη άρα

$$\Sigma F = -80\eta\mu(10\pi t + \frac{3\pi}{2}) \overset{t_1 = \frac{1}{12}s}{\Rightarrow} \Sigma F = -80\eta\mu(10\pi \frac{1}{12} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \Sigma F = -80\eta\mu(\frac{5\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}) \Rightarrow \Sigma F = -80\eta\mu(\frac{7\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -80\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \Sigma F = -80(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \Sigma F = 40\sqrt{3}\,N \text{ άρα και } \frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \mathbf{\frac{dp}{dt} = 40\sqrt{3}\ \frac{kg \cdot m}{s^2}}$$

3. Υλικό σημείο μάζας m = 0,2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση $x = \frac{A}{2}$ με θετική ταχύτητα, ενώ τη χρονική στιγμή t_1 διέρχεται για πρώτη φορά μετά την t = 0 από τη θέση ισορροπίας του. Στη χρονική διάρκεια $0 \to t_1$ το υλικό σημείο έχει διανύσει διάστημα 0,6 m, ενώ για να μεταβληθεί το μέτρο της ταχύτητάς του από την τιμή $\upsilon_1 = +\upsilon_{max}$ έως την τιμή $\upsilon_2 = -\upsilon_{max}$, χρειάζεται ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt = 0,1 s.

α. Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του υλικού σημείου και να την παραστήσετε γραφικά.

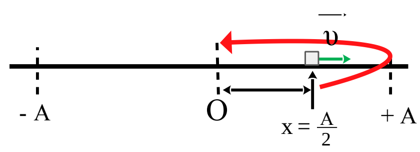
γ. Να βρείτε την κινητική ενέργεια του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές που η επιτάχυνση του ισούται με $-100\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$.

δ. Να βρείτε το χρόνο χρειάζεται η δυναμική ενέργεια να ξαναπάρει την τιμή που είχε τη χρονική στιγμή t = 0, για πρώτη και για δεύτερη φορά.

Δίνεται για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Το σώμα βρισκόμενο στη θέση $x = \frac{A}{2}$ τη χρονική στιγμή μηδέν και έχοντας θετική ταχύτητα κινείται προς την ακραία θέση, για να φτάσει σε αυτή θα διανύσει απόσταση $s_1 = \frac{A}{2}$ και μετά από κει διανύει επιπλέον απόσταση s_2 = A για να φτάσει στη θέση ισορροπίας. Άρα $s = s_1 + s_2 = \frac{A}{2} + A \Rightarrow 0{,}6 = \frac{3A}{2} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}4\,m}$.



Η ταχύτητα της ταλάντωσης έχει μέγιστη τιμή όταν το ταλαντούμενο σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας. Για να ξαναπεράσει το σώμα από τη Θ.Ι. με αντίθετη κατεύθυνση κίνησης χρειάζεται χρόνος $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t \Rightarrow T = 2 \cdot 0{,}1 \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\,s}$. Η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\pi \frac{rad}{s}}$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 = 0{,}2 \cdot (10\pi)^2 \Rightarrow \mathbf{D = 200\ N/m.}$

Η ενέργεια της ταλάντωσης E του υλικού σημείου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E=\frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0{,}16 \Rightarrow \mathbf{E=16\,J}$$

β. Τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση απομάκρυνσης $x=\frac{A}{2}$ με υ > 0, άρα η ταλάντωση έχει αρχική φάση. Έχουμε:

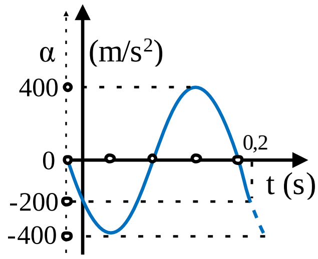
$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\xrightarrow[t=0]{x=\frac{A}{2}}\frac{A}{2}=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\varphi_0=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \varphi_0=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{0\le\varphi_0<2\pi}\begin{matrix}\varphi_0=\frac{\pi}{6}\text{rad}\\ \varphi_0=\frac{5\pi}{6}\text{rad}\end{matrix}$$

αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει υ > 0**.

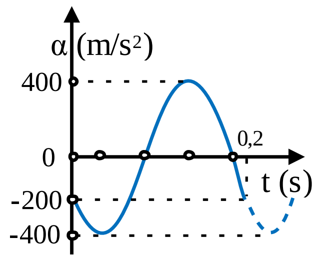
$$\begin{matrix}\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}>0\\ \upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}<0\end{matrix}\quad \text{άρα } \boldsymbol{\varphi_0=\frac{\pi}{6}\,\text{rad}}$$

Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης είναι $\alpha_{max}=\omega^2 A \Rightarrow \alpha_{max}=100\pi^2\cdot 0{,}4 \Rightarrow \alpha_{max}=400\ m/s^2$. Άρα:

$$\alpha=-\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow \boldsymbol{\alpha=-400\eta\mu(10\pi t+\frac{\pi}{6})\ (S.I.)}.$$



Για την γραφική παράσταση αυτής της σχέσης θα πρέπει να την επιτάχυνση την χρονική στιγμή t = 0.



$$\alpha=-400\eta\mu(10\pi\cdot 0+\frac{\pi}{6})\Rightarrow \alpha=-400\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha=-200\frac{m}{s^2}}$$

και επειδή η αρχική φάση είναι $\varphi_0<\frac{\pi}{2}$ θα μετακινήσουμε τον άξονα κάπου ανάμεσα στο $0<t<\frac{T}{4}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

γ. Από την τιμή της επιτάχυνσης ($\alpha=-100\sqrt{3}\ m/s^2$) μπορούμε να υπολογίσουμε την απομάκρυνση x.

Έχουμε: $\alpha=-\omega^2 x \Rightarrow x=-\frac{\alpha}{\omega^2}\Rightarrow x=-\frac{-100\sqrt{3}}{100\pi^2}\Rightarrow \mathbf{x=-0{,}1\sqrt{3}\,m}$

Για να βρούμε την κινητική ενέργεια του υλικού σημείου, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση.

$$E = K + U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2}Dx^2 = 16 - \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0{,}03 \Rightarrow \mathbf{K = 13\,J}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή t = 0 ήταν:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D\left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0{,}04 \Rightarrow \mathbf{U = 4\,J}$$

Η χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}4\eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6})}$ **(S.I.)**

Η χρονοεξίσωση της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0{,}16\eta\mu^2(10\pi t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \mathbf{U = 16\eta\mu^2(10\pi t + \frac{\pi}{6})}\ \ \mathbf{(S.I.)}$$

Αν τώρα θέσουμε την τιμή U = 4 J στην χρονοεξίσωση της δυναμικής ενέργειας θα βρούμε και την ζητούμενη τιμή του χρόνου.

$$U = 16\eta\mu^2(10\pi t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow 4 = 16\eta\mu^2(10\pi t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu^2(10\pi t + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{6}) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow 10\pi t + \frac{\pi}{6} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$60t + 1 = 6k \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} t = \dfrac{6k}{60}s \\ t = \dfrac{6k-2}{60}s \end{matrix}$$

άρα οι δύο πρώτες χρονικές στιγμές είναι $\mathbf{t_1 = \frac{4}{60}s}$ και $\mathbf{t_2 = \frac{6}{60}s}$

4. Μικρό σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς 200 N/m και κάθε 0,1π s διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχοντας ταχύτητα μέτρου 4 m/s. Τη χρονική στιγμή t = 0 το μικρό σώμα επιβραδύνεται και η ταχύτητα του ισούται με –2 m/s.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα μεγιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

β. Να γράψετε την χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης και να την παραστήσετε γραφικά.

γ. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της κινητικής ενέργειας του μικρού σώματος και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

δ. Να βρείτε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του μικρού σώματος τις χρονικές στιγμές που η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

Δίνεται για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. του κάθε $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t \Rightarrow T = 2 \cdot 0{,}1\pi \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\pi\,s}$.

Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\,\frac{rad}{s}}$.

Η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη κάθε φορά που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση. Αυτό συμβαίνει κάθε $\frac{T}{2}$ άρα η περίοδος της ενέργειας είναι: $T_U = \frac{T}{2} \Rightarrow T_U = \frac{0{,}2\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{T_U = 0{,}1\pi\,s}$ επομένως και

$$f_U = \frac{1}{T_U} \Rightarrow f_U = \frac{1}{0{,}1\pi} \Rightarrow \mathbf{f_U = \frac{10}{\pi}\,Hz}$$

Στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα είναι μέγιστη άρα: $\boldsymbol{\upsilon_{max} = 4\,m/s}$ άρα

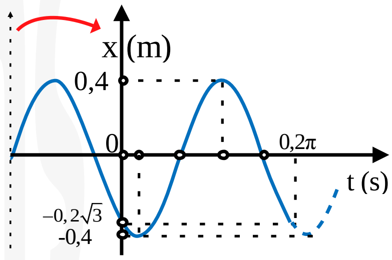
$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{4}{10} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}4\,m}$, επίσης $D = m\omega^2 \Rightarrow \mathbf{m = 2\,kg}$.

β. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα έχει ταχύτητα $\upsilon = -2$ m/s $\neq +\upsilon_{max}$ άρα έχουμε αρχική φάση.

$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[t=0]{\upsilon=-2m/s} -2 = 4\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \varphi_0 = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{0 \le \varphi_0 < 2\pi} \begin{matrix} \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\,rad \\ \varphi_0 = \frac{4\pi}{3}\,rad \end{matrix}$$

Την χρονική στιγμή t = 0 το σώμα επιβραδύνεται, άρα κατευθύνεται σε κάποιο άκρο της ταλάντωσης και επειδή η ταχύτητα είναι αρνητική συμπεραίνουμε ότι κατευθύνεται στο αρνητικό άκρο και βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα (x < 0).

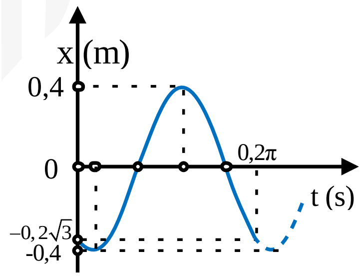
αποδεκτή λύση είναι αυτή που για **t = 0 θα μας δώσει x < 0**.



$$x = A\eta\mu\frac{2\pi}{3} > 0$$
$$x = A\eta\mu\frac{4\pi}{3} < 0$$
άρα $\boldsymbol{\varphi_0 = \frac{4\pi}{3}}$ **rad**

Η χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{4\pi}{3})}\ \mathbf{(S.I.)}$$



Για t = 0 προκύπτει $x = 0,4\eta\mu(10\cdot 0 + \frac{4\pi}{3}) \Rightarrow \mathbf{x = -0,2\sqrt{3}\,m}$

Η αρχική φάση $\frac{4\pi}{3}$ μετατοπίζει τον άξονα χρονικά κατά: $\varphi_0 = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \mathbf{\Delta t = \frac{2T}{3}}$ άρα προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{4\pi}{3})}$ **(S.I.)**.

Οπότε οι χρονοεξισώσεις της κινητικής και της δυναμική ενέργειας είναι αντίστοιχα:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\cdot 2(4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{4\pi}{3}))^2 \Rightarrow \mathbf{K = 16\sigma\upsilon\nu^2(10t + \frac{4\pi}{3})}\ \mathbf{(S.I.)}$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\cdot 200(0,4\eta\mu(10t + \frac{4\pi}{3}))^2 \Rightarrow \mathbf{U = 16\eta\mu^2(10t + \frac{4\pi}{3})}\ \mathbf{(S.I.)}$$

δ. Η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής στις θέσεις:

$$K = 3U \Rightarrow E - U = 3U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow A^2 = 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} \Rightarrow \mathbf{x = \pm 0,2\ m}$$

Άρα το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής είναι: $\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F| = |-Dx| = |-200\cdot(\pm 0,2)| \Rightarrow \mathbf{\left|\frac{dp}{dt}\right| = 40\ \frac{kg\cdot m}{s^2}}$