# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

**1.** Μικρό σώμα μάζας m = 0,2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση d = 40 cm. Το μικρό σώμα εκτελεί 4 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονική διάρκεια Δt = 2 s και η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση x = Αημωt.

**α.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, τη μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση και τη μέγιστη κατά μέτρο δύναμη επαναφοράς του σώματος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του.

**β.** Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας και την εξίσωση της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις σε βαθμολογημένους άξονες.

**γ.** Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του μικρού σώματος τις χρονικές στιγμές:

**i.** $t_1$ = 0,125 s και **ii.** $t_2$ = 0,0625 s.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

**Λύση**

**α.** Η απόσταση των ακραίων θέσεων είναι $d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow \mathbf{A = 20\,cm}$.

Η συχνότητα δίνεται από τη σχέση $f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{4}{2} \Rightarrow \mathbf{f = 2\,Hz}$.

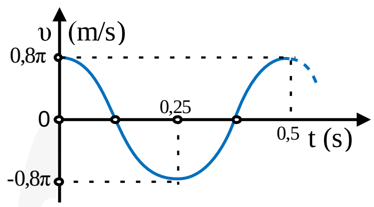
Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 4\pi}$ **rad/s**.

Η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα και η μέγιστη κατά μέτρο επιτάχυνση στην απλή αρμονική ταλάντωση υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\pi \cdot 0,2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{max} = 0,8\pi \frac{m}{s}},\ \alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{max} = (4\pi)^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{max} = 32 \frac{m}{s^2}}.$$

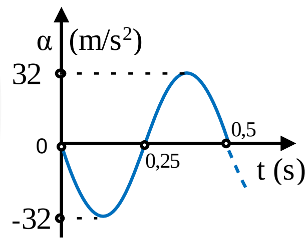
Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,2 \cdot (4\pi)^2 \Rightarrow \mathbf{D = 32 \frac{N}{m}}$.

Οπότε η μέγιστη τιμή της δύναμης είναι: $F_{max} = DA \Rightarrow F_{max} = 32 \cdot 0,2 \Rightarrow \mathbf{F_{max} = 6,4\,N}$




**β.** Επειδή η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής x = Αημωt, συμπεραίνουμε ότι ο χρονικές εξισώσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση είναι της μορφής $υ = υ_{max}συνωt$ και $α = –α_{max}ημωt$ και με αντικατάσταση προκύπτει: $υ = υ_{max}συνωt \Rightarrow \mathbf{υ = 0,8πσυν4πt}$ (S.I.)

και $α = -α_{max}ημωt \Rightarrow \mathbf{α = -32ημ4πt}$ (S.I.)




Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο: $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \mathbf{T = \frac{1}{2} s}$

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

**γ.** Για να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος μια δεδομένη χρονική στιγμή $t_1$, πρέπει να αντικαταστήσουμε τη χρονική αυτή στιγμή $t_1$ στις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης αντίστοιχα.

**i.** Για τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_1 = 0,125\ s}$ έχουμε:

$υ_1 = 0,8πσυν4πt_1 \Rightarrow υ_1 = 0,8πσυν(4π·0,125) \Rightarrow υ_1 = 0,8πσυν0,5π \Rightarrow \mathbf{υ_1 = 0}$

Ομοίως: $α_1 = –32ημ4πt_1 \Rightarrow α_1 = –32ημ(4π·0,125) \Rightarrow α_1 = –32ημ0,5π \Rightarrow \mathbf{α_1 = –32\ m/s^2}$

**ii.** Ομοίως για τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_2 = 0,0625\ s}$:

$υ_2 = 0,8πσυν4πt_2 \Rightarrow υ_2 = 0,8πσυν(4π·0,0625) \Rightarrow υ_2 = 0,8πσυν0,25π \Rightarrow υ_2 = 0,8π\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{υ_2 = 0,4π\sqrt{2}\,\frac{m}{s}}$

$α_2 = –32ημ4πt_2 \Rightarrow α_2 = –32ημ(4π·0,0625) \Rightarrow α_2 = –32ημ0,25π \Rightarrow α_2 = -32\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{α_2 = -16\sqrt{2}\,\frac{m}{s^2}}$

**2.** Υλικό σημείο μάζας m = 0,2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα μέτρου 2 m/s. Τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του η επιτάχυνση του ισούται με –20 $m/s^2$.

**α.** Να υπολογίσετε κάθε πότε μεγιστοποιείται το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου και το χρόνο που χρειάστηκε το σώμα να φτάσει στην ακραία θέση για πρώτη φορά.

**β.** Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου.

**γ.** Να υπολογίσετε τη δύναμη επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες διέρχεται από τη θέση $x_1$ = –0,1 m και τη θέση όπου έχει επιτάχυνση $\alpha_2$ = –15 $m/s^2$.

**Λύση**

**α.** Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης έχουμε $\mathbf{\upsilon = \upsilon_{max} = 2\ m/s}$.

Στα άκρα η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο άρα: $\mathbf{\alpha_{max} = |\alpha| = 20\ m/s^2}$.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση: $\alpha_{max} = \omega\upsilon_{max} \Rightarrow \omega = \frac{\alpha_{max}}{\upsilon_{max}} \Rightarrow \omega = \frac{20}{2} \Rightarrow \mathbf{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

και από τη σχέση $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{2}{10} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$ .

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου μεγιστοποιείται κατά μέτρο κάθε φορά που το υλικό σημείο φτάνει σε ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επειδή η χρονική διάρκεια μετάβασης του υλικού σημείου από τη μια ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη ισούται με $\Delta t = \frac{T}{2}$ (όπου T η περίοδος της ταλάντωσης),

Από την κυκλική συχνότητα έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\pi\,s}$

Συνεπώς το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου μεγιστοποιείται κάθε:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,2\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,1\pi\,s}$$

Ο χρόνος για την μετάβαση από τη Θ.Ι. στο άκρο της ταλάντωσης είναι: $\Delta t' = \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{\Delta t' = 0,1\pi\,s}$

**β.** Αφού την t = 0 το υλικό σημείο διέρχεται από τη Θ.Ι. του (x = 0) με θετική ταχύτητα (υ > 0), οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του υλικού σημείου είναι αντίστοιχα οι:

$x = A\eta\mu\omega t$, $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ και $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t$ άρα αντικαθιστώντας έχουμε:

$\mathbf{x = 0,2\eta\mu 10t}$, $\mathbf{\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu 10t}$ και $\mathbf{\alpha = -20\eta\mu 10t}$ όλες στο (S.I.)

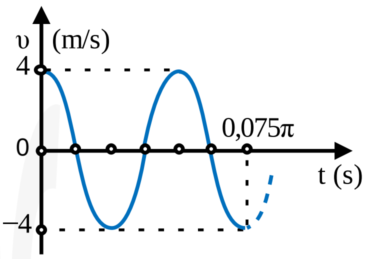
**γ.** Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = m\omega^2 \Rightarrow \mathbf{D = 20\ N/m}$.

Συνεπώς κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_1 = -0,1$ m δέχεται δύναμη επαναφοράς η οποία υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{\varepsilon\pi.(1)} = -Dx_1 \Rightarrow F_{\varepsilon\pi.(1)} = -20\cdot(-0,1) \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\pi.(1)} = 2\,N}$.

Όταν μας δίνεται η επιτάχυνση μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη επαναφοράς από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $F_{\varepsilon\pi.(2)} = m\alpha_2 = 0,2\cdot(-15) \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\pi.(2)} = -3\,N}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την απομάκρυνση από τη σχέση $\mathbf{\alpha = -\omega x^2}$ και στην συνέχεια να υπολογίσουμε την δύναμη επαναφοράς όπως στην πρώτη περίπτωση.

**3.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας m = 0,5 kg που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.




**α.** Να υπολογίσετε το πλάτος και τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος.

**β.** Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης, τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα και την εξίσωση $F_{επ} = f(x)$ να σχεδιάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σε βαθμολογημένους άξονες.

**γ.** Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ισούται με $\frac{dp}{dt} = 40\frac{kg \cdot m}{s^2}$.

**δ.** Να βρείτε τη σχέση η οποία συνδέει την επιτάχυνση και την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του την ίδια χρονική στιγμή και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης αυτής σε βαθμολογημένους άξονες. Θεωρήστε για τις πράξεις: $π^2 = 10$.

**Λύση**

**α.** Από τη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου παίρνουμε τις παρακάτω πληροφορίες:

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι συνιμητονοειδής άρα δεν έχει αρχική φάση ($υ = υ_{max}$συνωt), η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ισούται με $\mathbf{υ_{max} = 4\ m/s}$ και η χρονική στιγμή **0,075π s** είναι ίση με **Δt = T + T/2** άρα:

$$Δt = T + \frac{T}{2} \Rightarrow Δt = \frac{3T}{2} \Rightarrow 0,075π = \frac{3T}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 0,05π\ s} \text{ άρα και } ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow \mathbf{ω = 40\frac{rad}{s}}$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $D = mω^2 \Rightarrow \mathbf{D = 800\frac{N}{m}}$

και από την μέγιστη ταχύτητα έχουμε: $υ_{max} = ωA \Rightarrow A = \frac{υ_{max}}{ω} \Rightarrow A = \frac{4}{40} \Rightarrow \mathbf{A = 0,1\,m}$

**β.** Επειδή η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής $υ = υ_{max}$συνωt, συμπεραίνουμε ότι η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής x = Αημωt.

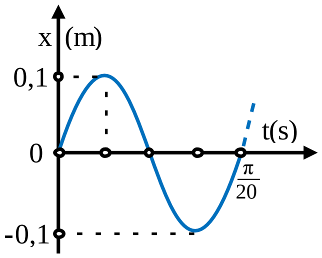
Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει: **x = 0,1ημ40t (S.I.)**

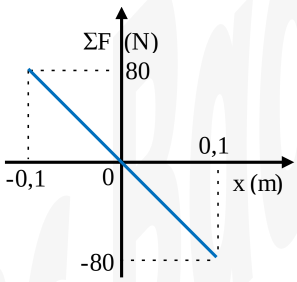
Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του υπολογίζεται από τη σχέση $\Sigma F = -Dx \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -800x}$ **(S.I.)**

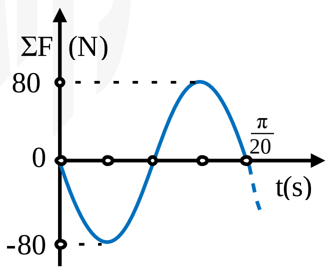
Αν τώρα στην παραπάνω σχέση κάνουμε αντικατάσταση την χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει η χρονοεξίσωση της δύναμης.

$\Sigma F = -800x \Rightarrow \Sigma F = -800 \cdot 0,1\eta\mu 40t \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = -80\eta\mu 40t}$ **(S.I.)**

Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων x = f(t), ΣF = f(x) και ΣF = f(t) φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



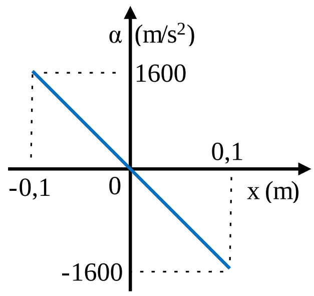




**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα. Επομένως:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\alpha \Rightarrow 40 = 0,5\alpha \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 80\frac{m}{s^2}}$$

**δ.** Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνση του από τι θέση ισορροπίας του την ίδια χρονική στιγμή συνδέονται με τη σχέση: $\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \mathbf{\alpha = -1600x}$ (S.I.) με $-0,1\ m \le x \le 0,1\ m$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η ζητούμενη γραφική παράσταση.



**4.** Υλικό σημείο μάζας m = 2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D = 200 N/m και ενέργεια ταλάντωσης 16 J και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

**α.** Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου και την απόσταση που διανύει τα υλικό σημείο σ' αυτό το χρονικό διάστημα.

**β.** Να βρείτε τις χρονικές εξισώσεις της κινητικής και δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων αυτών σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων μαζί με την ενέργεια της ταλάντωσης.

**γ.** Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της απομάκρυνσης του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ισούται με $x_1 = 0,2$ m.

**δ.** Να βρείτε τις θέσεις στις οποίες η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι ίσες. Πόσες φορές στην διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης ισχύει η σχέση K = U;

**Λύση**

**α.** Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου μεγιστοποιείται κάθε φορά που μεγιστοποιείται και η ταχύτητά του. Ως γνωστό, αυτό συμβαίνει κάθε φορά που το υλικό σημείο διέρχεται από τη Θ.Ι. του.

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του υλικού σημείου από τη Θ.Ι. του ισούται με $\Delta t = \frac{T}{2}$.

Ισχύει: $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{200}{2}} \Rightarrow \mathbf{\omega = 10\frac{rad}{s}}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\pi\ s}$.

Συνεπώς $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,2\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,1\pi\ s}$.

Η απόσταση για την μετάβαση από τη Θ.Ι. ως την επιστροφή σ' αυτή είναι 2 φορές το πλάτος της ταλάντωσης αφού Θ.Ι. → άκρο έχουμε $s_1 = A$ και άκρο → Θ.Ι. έχουμε $s_2 = A$, άρα s = 2A.

Το πλάτος υπολογίζεται από την ενέργεια ταλάντωσης: $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\cdot 16}{200}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,4m}$

Άρα s = 2A ⇒ **s = 0,8 m**

**β.** Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \mathbf{x = 0,4\eta\mu 10t}$ (S.I.)

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου υπολογίζεται από τη σχέση:

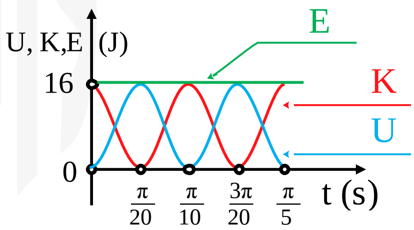
$$U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}200(0,4\eta\mu 10t)^2 \Rightarrow \mathbf{U=16\eta\mu^2 10t} \quad (S.I.).$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι: $\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \upsilon=10\cdot 0,4\sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon=4\sigma\upsilon\nu 10t}$ (S.I.)

και η κινητική ενέργεια είναι: $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}2(4\sigma\upsilon\nu 10t)^2 \Rightarrow \mathbf{K=16\sigma\upsilon\nu^2 10t}$ (S.I.)

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο και ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή **E = 16 J**

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.




**γ.** Ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης ($\frac{dx}{dt}=\upsilon_1$) είναι η ταχύτητα την οποία μπορούμε να την υπολογίσουμε εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση:

$$E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 \Rightarrow \omega^2(A^2-x_1^2)=\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1^2=100(0,16-0,04)=12 \Rightarrow |\boldsymbol{\upsilon_1}| = \mathbf{2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$$

άρα $\frac{dx}{dt}=\upsilon_1 \Rightarrow \mathbf{\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$

**δ.** Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση έχουμε:

$$E=K+U \overset{K=U}{\Rightarrow} E=2U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2=2\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{x=\pm 0,2\sqrt{2}\,m}.$$

Ένα σώμα που ταλαντώνεται περνά από κάθε θέση δύο φορές (εκτός των άκρων) με αντίθετες ταχύτητες σε κάθε ταλάντωση. Άρα η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι ίσες **τέσσερις φορές** σε κάθε ταλάντωση.

**5.** Μικρό σώμα μάζας m = 2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t = 0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, ενώ τη χρονική στιγμή $t_1$ = 0,05π s μηδενίζεται για πρώτη φορά (μετά τη στιγμή t = 0) η ταχύτητα του. Τη χρονική στιγμή $t_1$ το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος ισούται με 20 m/s$^2$.

**α.** Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

**β.** Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το μικρό σώμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας (ΣF = f(x)) και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

**γ.** Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των θέσεων Κ και Λ της τροχιάς του μικρού σώματος ($x_K \neq x_Λ$) στις οποίες η ταχύτητα του έχει μέτρο $\sqrt{3}$ m/s.

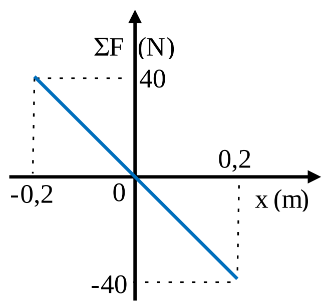
**δ.** Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει στη θέση $x_1 = -0{,}1\sqrt{3}\,m$, για πρώτη φορά.

**Λύση**

**α.** Η ταχύτητα σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μηδενίζεται κάθε φορά που φτάνει στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του. Ξεκινώντας από τη Θ.Ι. ισορροπίας για πρώτη φορά θα φτάσει στη θέση x = +A και χρειάζεται χρόνο $t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow 0{,}05\pi = \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\pi\, s}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\frac{rad}{s}}$

Στα άκρα η επιτάχυνση είναι μέγιστη άρα:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} \Rightarrow A = \frac{20}{100} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2\,m}$$




**β.** Είναι $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 2\cdot 100 \Rightarrow$ **D = 200 N/m**. Συνεπώς: **ΣF = – 200x** (S.I.)

με $-0{,}2\ m \leq x \leq +0{,}2\ m$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**γ.** Γνωρίζουμε την ταχύτητα (μέτρο) του σώματος, οπότε μπορούμε να βρούμε τις θέσεις στις οποίες αποκτά την ταχύτητα αυτή χρησιμοποιώντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση.

$$E = K + U \Rightarrow DA^2 = m\upsilon^2 + Dx^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \frac{m\upsilon^2}{D} \Rightarrow x^2 = 0{,}04 - \frac{2\cdot 3}{200} \Rightarrow \mathbf{x = \pm 0{,}1\,m}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του μικρού σώματος έχει μέτρο $\sqrt{3}$ m/s σε δύο θέσεις της ταλάντωσης, τη x = –0,1 m και τη x = + 0,1 m. Συνεπώς η μια θέση θα είναι η θέση του σημείου Κ (έστω $x_K$ = –0,1 m), ενώ η άλλη θέση θα είναι η θέση του σημείου Λ ($x_Λ$ = 0,1m). Η ζητούμενη απόσταση είναι:

$d = |x_K| + |x_Λ| \Rightarrow$ **$d = 0{,}2$ m**

**δ.** Η χρονοεξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής x = Αημωt ⇒ **x = 0,2ημ10t** (S.I)

με αντικατάσταση της τιμής $x_1$ προκύπτει: $-0{,}1\sqrt{3} = 0{,}2\eta\mu 10t \Rightarrow \eta\mu 10t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 10t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ 10t = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 30t = 6\kappa\pi - \pi \\ 30t = 6\kappa\pi + 4\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{6\kappa\pi - \pi}{30} \text{ (s)} \\ t = \frac{6\kappa\pi + 4\pi}{30} \text{ (s)} \end{array}$$

Οι δύο σειρές λύσεων δίνουν ως πρώτη αποδεκτή τιμή $t_1 = \frac{5\pi}{30}$s και $t_2 = \frac{4\pi}{30}$s άρα για πρώτη φορά έχουμε

$\mathbf{t = \frac{4\pi}{30}s}$.

**6.** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και σε χρονικό διάστημα Δt = 2π s περνά 20 φορές από τη Θ.Ι.. Την χρονική στιγμή t = 0 το σώμα περνά από τη Θ.Ι. έχοντας θετική ταχύτητα. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι D = 100 N/m, ενώ τις χρονικές στιγμές που περνά από τη θέση $x_1 = 0{,}1\sqrt{2}\,\text{m}$ έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = \sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**α.** Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει το σώμα σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης του,

**β.** Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του σημειακού αντικειμένου καθώς και την εξίσωση της κινητικής του ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του (U = f(x) και K = f(x)) και να σχεδιάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

**γ.** Να βρείτε το έργο της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το σημειακό αντικείμενο κατά τη μετάβαση του από την ακραία θετική θέση της ταλάντωσης του στη θέση ισορροπίας του

**δ.** Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημειακού αντικειμένου από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η κινητική του ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας.

**Λύση**

**α.** Σε κάθε ταλάντωση το σώμα περνά δύο φορές από τη Θ.Ι., άρα έχουμε 10 ταλαντώσεις σε χρόνο Δt.

$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{10}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{f = \frac{5}{\pi}\,Hz} \quad \text{και } \omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 10\ rad/s}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της. Έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 \Rightarrow A^2 = \frac{\upsilon_1^2}{\omega^2} + x_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2}{\omega^2} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{100} + 0{,}02} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2\,m}$$

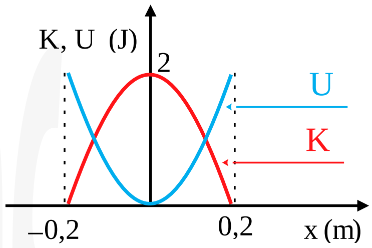
Η απόσταση που διανύει το σώμα σε κάθε περίοδο της ταλάντωσης ισούται με d = 4A ⇒ **d = 0,8 m**.

**β.** Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και η απομάκρυνση του αντικειμένου από τη Θ.Ι. του συνδέονται με τον τύπο: $U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}100x^2 \Rightarrow \mathbf{U = 50x^2}$ (S.I.) με $-0{,}2\text{ m} \le x \le 0{,}2\text{ m}$

Η κινητική ενέργεια του σημειακού αντικειμένου δε συνδέεται με την απομάκρυνση του με κάποια άμεση σχέση. Η ζητούμενη σχέση τους μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση.

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}100 \cdot 0,04 \Rightarrow \mathbf{E = 2\,J}$

$E = K + U \Rightarrow K = E - U \Rightarrow \mathbf{K = 2 - 50x^2}$ (S.I.) με $-0,2\text{ m} \le x \le 0,2\text{ m}$




Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων U = f(x) και K = f(x) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

**γ.** Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη δύναμη και το έργο της μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σημειακού αντικειμένου από την ακραία θετική του θέση στη θέση ισορροπίας. Έχουμε: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ΣF}$ (1)

Είναι $K_{αρχ} = 0$ (αφού η αρχική θέση είναι ακραία θέση) και

$K_{τελ} = 2 - 50 \cdot 0^2 \Rightarrow K_{τελ} = 2\text{ J}$ (αφού η τελική θέση για το Θ.Μ.Κ.Ε. είναι η Θ.Ι. (x = 0)).

Από τη σχέση (1) προκύπτει: $2 - 0 = W_{ΣF} \Rightarrow \mathbf{W_{ΣF} = 2\,J}$

**δ.** Ζητάμε την απομάκρυνση του σημειακού αντικειμένου από τη Θ.Ι. του όταν K = 3U.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση:

$$E = K + U \overset{K=3U}{\Rightarrow} E = 3U + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} \Rightarrow \mathbf{x = \pm 0,1\,m}$$

**7.** Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D = 50 N/m. Το σώμα περνά από θέση $x_1$ ($x_1 > 0$), έχοντας δυναμική ενέργεια $U_1 = 2{,}25$ J και ταχύτητα $\upsilon_1 = 2$ m/s. Τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση $x_2$, δέχεται δύναμη επαναφοράς αλγεβρικής τιμής $F_2 = 20$ N, κινούμενο επιβραδυνόμενο με ταχύτητα μέτρου $|\upsilon_2| = 1{,}5$ m/s.

**α.** Να βρείτε τη μάζα του σώματος και την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας $\upsilon_2$.

**β.** Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των άκρων της ταλάντωσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί αυτή η απόσταση.

**γ.** Να γραφούν οι σχέσεις $K = f(\upsilon)$ και $U = f(\upsilon)$ και να παρασταθούν γραφικά.

**δ.** Να βρεθεί ο λόγος $\frac{K}{U}$ όταν το σώμα περνά από τη θέση $x = \frac{A}{2}$.

**Λύση**

**α.** Η θέση $x_1$ είναι η: $U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2U_1}{D}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}25}{50}} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0{,}3\,m}$

Από την δύναμη επαναφοράς για την θέση $x_2$ έχουμε: $F_2 = -Dx_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{F_2}{D} \Rightarrow x_2 = -\frac{20}{50} \Rightarrow \mathbf{x_2 = -0{,}4\,m}$.

Ένα ταλαντούμενο σώμα επιβραδύνεται όταν κινείται προς τα άκρα. Εφόσον $x_2 < 0$ βρισκόμαστε στον αρνητικό ημιάξονα της ταλάντωσης, άρα κατευθυνόμαστε προς το αρνητικό άκρο οπότε: $\mathbf{\upsilon_2 = -1{,}5\ m/s}$.

Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση για τις δύο θέσεις $x_1$, $x_2$:

$$\left.\begin{array}{l} E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 \\ E = K_2 + U_2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2{,}25 - 4}{0{,}09 - 0{,}16}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\frac{rad}{s}}$$ και από την σταθερά επαναφοράς έχουμε: $D = m\omega^2 \Rightarrow m = \frac{D}{\omega^2} \Rightarrow \mathbf{m = 2\,kg}$

**β.** Τα δύο άκρα απέχουν d = 2A άρα:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{D} + x_1^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{8}{50} + 0{,}09} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}5\,m}$$

και τελικά $d = 2A \Rightarrow$ **d = 1 m**.

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\pi\, s}$

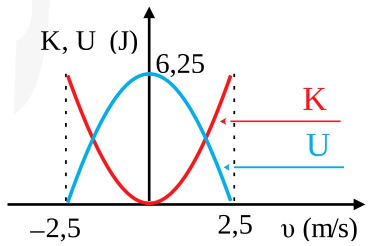
Ο χρόνος για την απευθείας μετάβαση από το ένα άκρο στο άλλο είναι: $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,4\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0,2\pi\, s}$

**γ.** Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}2\upsilon^2 \Rightarrow \mathbf{K = \upsilon^2}$ (S.I.) με $-2,5$ m/s $\leq \upsilon \leq 2,5$ m/s

Την ενέργεια της ταλάντωσης μπορούμε να την υπολογίσουμε και από τη σχέση $E = K_{max} \Rightarrow \mathbf{E = 6,25\ J}$

και από την Α.Δ.Ε. βρίσκω την έμμεση εξάρτηση της δυναμικής ενέργειας και της ταχύτητας. $U = E - K \Rightarrow \mathbf{U = 6,25 - \upsilon^2}$ (S.I.) με $-2,5$ m/s $\leq \upsilon \leq 2,5$ m/s.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.




**δ.** Για τον λόγο $\frac{K}{U}$ έχουμε:

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} \quad (1)$$

και επειδή $x = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 2x$ με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\frac{K}{U} = \frac{(2x)^2 - x^2}{x^2} = \frac{4x^2 - x^2}{x^2} \Rightarrow \mathbf{\frac{K}{U} = 3}$$

**8.** Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και περνάει από δύο σημεία της τροχιάς του Α και Β που απέχουν απόσταση $d = 20\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, με την ίδια ταχύτητα. Για τη μετάβαση από το σημείο Α στο Β απαιτείται χρονικό διάστημα $t_1 = 4$ s. Μετά το πέρασμα του από το Β το υλικό σημείο χρειάζεται χρονικό διάστημα $t_2 = 4$ s για να περάσει πάλι από το σημείο Β κινούμενο με αντίθετη φορά. Να βρείτε:

**α.** την περίοδο της ταλάντωσης,

**β.** το πλάτος της ταλάντωσης.

**Λύση**

**α.** Στα σημεία Α και Β έχουμε ίδια ταχύτητα άρα οι θέσεις αυτές είναι συμμετρικές ως προς τη θέση ισορροπίας και αυτό γιατί ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} E = K_A + U_A \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx_A^2 \\ E = K_B + U_B \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}Dx_B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx_A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx_B^2 \Rightarrow x_A = \pm x_B \Rightarrow x_A = -x_B$$

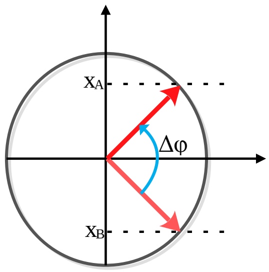
Λόγω συμμετρίας θα χρειαστεί επίσης χρόνος $t_2$ από το Α να ξαναφτάσει στο σημείο Α με αντίθετη ταχύτητα. Άρα η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι: $T = 2t_1 + 2t_2 \Rightarrow$ **$T = 16$ s**.

Εδώ το βλέπουμε και σχηματικά. $\underbrace{\underset{\upsilon>0}{A} \xrightarrow{t_1} \underset{\upsilon>0}{B} \xrightarrow{t_2} \underset{\upsilon<0}{B} \xrightarrow{t_1} \underset{\upsilon<0}{A} \xrightarrow{t_2} \underset{\upsilon>0}{A}}_{T}$

**β.** Εφόσον οι θέσεις Α και Β είναι συμμετρικές ως προς τη Θ.Ι. για την μετάβαση από τη Θ.Ι. σε κάποια από τις δύο θέσεις θα απαιτείται χρόνος $t_3 = \frac{t_1}{2} \Rightarrow t_3 = 2\,\mathrm{s}$

Έστω ότι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και κάποια χρονική στιγμή t ισχύει $\eta\mu\varphi = 0$ άρα και $x = A\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 2k\pi$ (με $\upsilon > 0$) και μετά από χρονικό διάστημα $t_3$ φτάνουμε στη θέση Α υποθέτοντας ότι βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα.

$$x_A = A\eta\mu(\varphi + \omega t_3) \Rightarrow \frac{d}{2} = A\eta\mu(2k\pi + \frac{2\pi}{16}\cdot 2) \Rightarrow 10\sqrt{2} = A\eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow 10\sqrt{2} = A\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{A = 20\,cm}.$$




**Σημείωση:** Η λύση με το στρεφόμενο διάνυσμα είναι αρκετά πιο απλή.

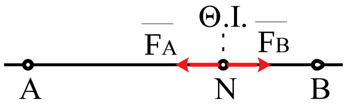
Έστω $x_A > 0$ και $x_B < 0$, όπως στο σχήμα. Από το Β στο Α το στρεφόμενο διάνυσμα (μήκους Α) διαγράφει γωνία $\Delta\varphi = \omega t_1 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{16}\cdot 4 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$. Δηλαδή το σχηματιζόμενο τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές άρα με πυθαγόρειο παίρνουμε: $d^2 = A^2 + A^2 \Rightarrow d^2 = 2A^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}A \Rightarrow 20\sqrt{2} = \sqrt{2}A \Rightarrow \mathbf{A = 20\,cm}$.

**9.** Δύο σημεία Α και Β βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους $\ell$ = 0,9 m. Πάνω στη γραμμή που τα ενώνει μπορεί να κινείται χωρίς τριβή υλικό σημείο Ν μάζας $m = 96\cdot10^{-3}$ kg, το οποίο δέχεται από τα σημεία Α και Β ελκτικές δυνάμεις που έχουν μέτρα $F_A = 0{,}8\cdot(AN)$ και $F_B = 1{,}6\cdot(BN)$ αντίστοιχα (στο S.I.).

**α.** Να δείξετε ότι το υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

**β.** Αν το υλικό σημείο περνάει από το σημείο Α με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_A$ = 1,5 m/s, ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του όταν περνάει από το σημείο Β;

**Λύση**




**α.** Το υλικό σημείο ισορροπεί σε θέση όπου έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow F_A = F_B \Rightarrow 0{,}8\cdot(AN) = 1{,}6\cdot(BN) \Rightarrow (AN) = 2\cdot(BN) \Rightarrow (AN) = 2\cdot[\ell - (AN)] \Rightarrow 3(AN) = 2\ell \Rightarrow (AN) = 0{,}6\,\text{m}$$

Σε μία θέση απομάκρυνσης x δεξιά από τη Θ.Ι. έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = F'_B - F'_A = 1{,}6\cdot[(BN) - x] - 0{,}8\cdot[(AN) + x] = 1{,}6\cdot(BN) - 1{,}6x - 0{,}8\cdot(AN) - 0{,}8x = -2{,}4x = -Dx$$

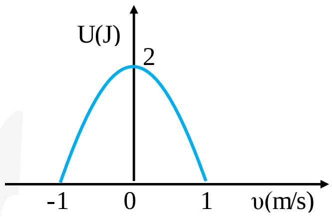
Άρα έχουμε Α.Α.Τ. με **D = 2,4 N/m.**

**β.** Όταν το υλικό σημείο περνά από το σημείο Α έχει απομάκρυνση $x_A$ = –0,6 m, ενώ όταν περνά από τη θέση Β έχει απομάκρυνση $x_B$ = 0,3 m. Εφαρμόζω την Α.Δ.Ε. για τις δύο αυτές θέσεις.

$$\left.\begin{aligned} E = K_A + U_A \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}Dx_A^2 \\ E = K_B + U_B \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}Dx_B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}Dx_A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}Dx_B^2 \Rightarrow \upsilon_B = \pm\sqrt{\upsilon_A^2 + \frac{D}{m}(x_A^2 - x_B^2)}$$

$$\upsilon_B = \sqrt{2{,}25 + \frac{2{,}4}{96\cdot10^{-3}}(0{,}36 - 0{,}09)} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_B = 3\,\frac{m}{s}}$$

**10.** Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί Α.Α.Τ., δίνεται στο σχήμα. Το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης 20 φορές σε χρόνο π s. Να βρεθούν:




**α.** η απόσταση των άκρων της ταλάντωσης

**β.** η μάζα του σώματος

**γ.** η δυναμική ενέργεια του σώματος, όταν η ταχύτητα του έχει μέτρο $\upsilon_1 = 0{,}5$ m/s.

**δ.** να γράψετε την χρονοεξίσωση της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης και να την σχεδιάσετε για χρόνο μιας περιόδου θεωρώντας ότι η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι μηδέν.

**Λύση**

**α.** Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $U_{max} = 2$ J και $\upsilon_{max} = 1$ m/s. Σε κάθε ταλάντωση ένα σώμα περνά δύο φορές από τη θέση ισορροπίας , οπότε οι ταλαντώσεις που πραγματοποιούνται σε χρόνο π s είναι 10.

$$f = \frac{N}{t} = \frac{10}{\pi} \Rightarrow \mathbf{f = \frac{10}{\pi}\,Hz}, \text{ και } \quad \omega = 2\pi f = 2\pi\frac{10}{\pi} \Rightarrow \mathbf{\omega = 20\,\frac{rad}{s}}.$$

Ισχύει: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \dfrac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \dfrac{1}{20} \Rightarrow \mathbf{A = 0,05\,m}$

Η απόσταση των άκρων είναι $d = 2A \Rightarrow d = 2\cdot 0{,}05 \Rightarrow d = 0{,}1$ m.

**β.** Ισχύει: $U_{max} = E = \dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = \dfrac{2U_{max}}{A^2} \Rightarrow D = \dfrac{2\cdot 2}{0{,}05^2} \Rightarrow \mathbf{D = 1600\,\dfrac{N}{m}}$

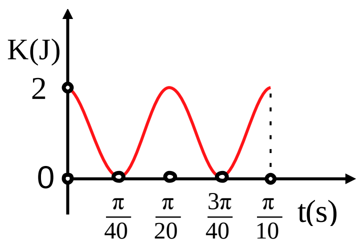
αλλά $D = m\omega^2 \Rightarrow m = \dfrac{D}{\omega^2} \Rightarrow m = \dfrac{1600}{400} \Rightarrow \mathbf{m = 4\,kg}$

**γ.** Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση έχουμε:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow U_1 = E - K_1 \Rightarrow U_1 = E - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow U_1 = 2 - \frac{1}{2}4\cdot 0{,}25 \Rightarrow \mathbf{U_1 = 1,5\,J}$$

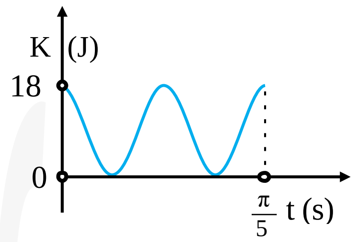
**δ.** Η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}m(\upsilon_{max}\text{συν}\omega t) =$

$\dfrac{1}{2}m\upsilon_{max}^2\text{συν}^2\omega t = E\text{συν}^2\omega t \Rightarrow$ $\mathbf{K = 2\text{συν}^2 20t}$ **(S.I.).**




Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \mathbf{T = \dfrac{\pi}{10}\,s}$

**11.** Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος μάζας m = 4 kg που εκτελεί Α.Α.Τ., χωρίς αρχική φάση, δίνεται στο σχήμα.




**α.** Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ορμής και η μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος,

**β.** Να βρεθεί το μήκος της τροχιάς που διανύει το ταλαντούμενο σώμα σε κάθε επανάληψη της κίνησης του.

**γ.** Να γίνει η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο στο ίδιο διάγραμμα.

**δ.** Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση $x_1 = -0{,}15$ m για τρίτη φορά.

**Λύση**

**α.** Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $\mathbf{K_{max} = 18\ J = E}$ και $\mathbf{T = \frac{\pi}{5}\, s}$.

Άρα έχουμε $K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot 18}{4}} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_{max} = 3\frac{m}{s}}$ και

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \omega = 10\,\frac{rad}{s}$. Επίσης έχουμε: $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 4\cdot 100 \Rightarrow \mathbf{D = 400\frac{N}{m}}$,

επίσης $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}3\ m}$

Η μέγιστη τιμή της ορμής είναι: $p_{max} = m\upsilon_{max} \Rightarrow p_{max} = 4\cdot 3 \Rightarrow \mathbf{p_{max} = 12\ kg\cdot m/s}$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη

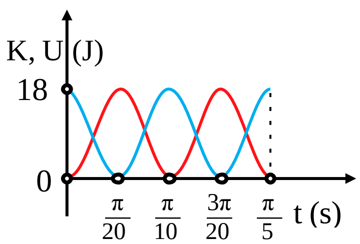
$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{max} = \Sigma F_{max} = DA \Rightarrow \left.\frac{dp}{dt}\right|_{max} = 400\cdot 0{,}3 \Rightarrow \left.\mathbf{\frac{dp}{dt}}\right|_{\mathbf{max}} \mathbf{= 120\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$$

**β.** Σε κάθε ταλάντωση, το ταλαντούμενο σώμα διανύει απόσταση ίση με 4 φορές το πλάτος του άρα:

$d = 4A \Rightarrow d = 4\cdot 0{,}3 \Rightarrow \mathbf{d = 1{,}2\ m.}$

**γ.** Η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D(A\eta\mu\omega t) \Rightarrow$

$U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\omega t \Rightarrow U = E\eta\mu^2\omega t \Rightarrow \mathbf{U = 18\eta\mu^2 10t\ \ (S.I.)}$.




Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**δ.** Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: x = Αημωt $\Rightarrow$ **x = 0,3ημ10t (S.I.)**

Θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση την τιμή $x_1 = -0{,}15$ m και έχουμε:

$$-0{,}15 = 0{,}3\eta\mu 10t \Rightarrow \eta\mu 10t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10t = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \\ 10t = 2k\pi + \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 60t = 12k\pi - \pi \\ 60t = 12k\pi + 7\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \dfrac{12k\pi - \pi}{60} \text{ (S.I.)} \\ t = \dfrac{12k\pi + 7\pi}{60} \text{ (S.I.)} \end{array}$$

Οι τιμές που δίνουν οι παραπάνω εξισώσεις είναι: $t_1 = \frac{7\pi}{60}$s, $t_2 = \frac{11\pi}{60}$s, $t_3 = \frac{19\pi}{60}$s.

Άρα για τρίτη φορά έχουμε $\mathbf{t_3 = \frac{19\pi}{60}s}$.