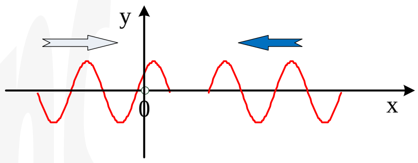
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

☞ Τι ονομάζουμε στάσιμο κύμα



Εξαιτίας της συμβολής δύο κυμάτων του ίδιου πλάτους και της ίδιας συχνότητας που διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο με αντίθετη φορά, προκύπτει μια ιδιάζουσα κυματική κατάσταση η οποία ονομάζεται στάσιμο κύμα. **Στάσιμο κύμα λέγεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων με ίδιο πλάτος και ίδια συχνότητα τα οποία διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις.**

☞ Η εξίσωση του στάσιμου κύματος

Έστω ότι κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους Α και ίδιας περιόδου Τ με αντίθετες κατευθύνσεις. Επειδή διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα, θα έχουν και το ίδιο μήκος κύματος. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) ένα σημείο Ο για το οποίο οι απομακρύνσεις εξαιτίας του κάθε κύματος χωριστά περιγράφονται από την ίδια εξίσωση $y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$. Το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά περιγράφεται από την εξίσωση: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (1)

ενώ το κύμα που διαδίδεται προς τ' αριστερά περιγράφεται από την εξίσωση: $y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ (2)

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση ενός σημείου Σ του μέσου διάδοσης το οποία βρίσκεται στη θέση x του άξονα τη χρονική στιγμή t είναι: $y = y_1 + y_2$

η οποία, λόγω των εξισώσεων (1) και (2), γίνεται: $y = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$ προκύπτει:

$$\mathbf{y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}}$$

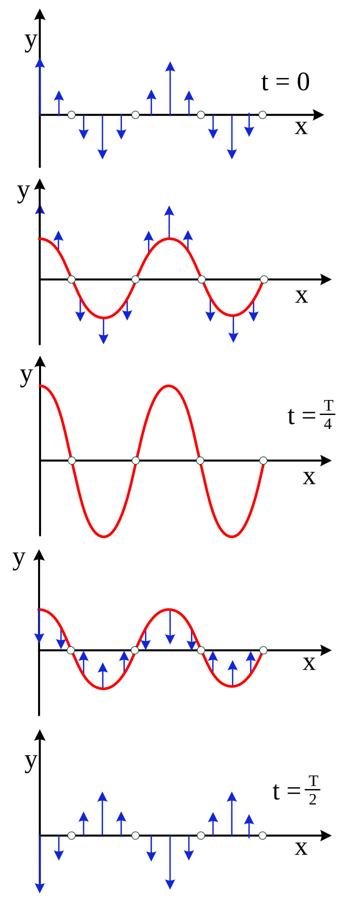
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την εξίσωση του στάσιμου κύματος. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι η απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του μέσου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

Επίσης, ο παράγοντας $A' = 2A\text{συν}\dfrac{2\pi x}{\lambda}$ δε μεταβάλλεται με το χρόνο και εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σημείου. Κάθε σημείο του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερό πλάτος, το οποίο όμως διαφέρει από σημείο σε σημείο και είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του παράγοντα A′.

$$\textbf{Πλάτος} = A' = 2A\left|\text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

☞ **Οι θέσεις που βρίσκονται τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (κοιλίες)**



Το πλάτος της ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου του μέσου διάδοσης είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του παράγοντα $A' = 2A\left|\text{συν}\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|$. Κατά συνέπεια, τα υλικά σημεία τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (2A) είναι τα σημεία εκείνα των οποίων οι θέσεις x στον άξονα $x'Ox$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$A' = 2A \Rightarrow \left|\text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1 \Rightarrow \text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = N\pi, \quad \text{όπου } N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Επομένως η τετμημένη των υλικών σημείων που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος είναι:

$$x_\kappa = N\frac{\lambda}{2} \quad \text{με } N=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

☞ **Οι θέσεις που βρίσκονται τα υλικά σημεία που παραμένουν ακίνητα (δεσμοί)**

Για τα υλικά σημεία που παραμένουν ακίνητα το πλάτος είναι μηδέν (A' = 0). Συνεπώς οι θέσεις x των σημείων αυτών στον άξονα $x'Ox$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$A' = 0 \Rightarrow \text{συν}\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2N+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{όπου } N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Επομένως η τετμημένη των υλικών σημείων που παραμένουν ακίνητα είναι:

$x_\delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$ με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Παρατήρηση: Οι αρνητικές τιμές που παίρνει το N στους δύο τύπους $x_\kappa = N\frac{\lambda}{2}$ και $x_\delta = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$ μας δίνουν τις θέσεις των κοιλιών ή δεσμών που βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα. Αν εξετάζουμε το στάσιμο κύμα στο θετικό ημιάξονα, τότε χρησιμοποιούμε μόνο τις θετικές τιμές του N.

☞ **Με τι ισούται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών**

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών ισούται με τη διαφορά:

$$d_{\kappa-\kappa} = x_{\kappa(N+1)} - x_{\kappa(N)} = (N+1)\frac{\lambda}{2} - N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \mathbf{d_{\kappa\text{-}\kappa} = \frac{\lambda}{2}}$$

☞ **Με τι ισούται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών**

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με τη διαφορά:

$$d_{\delta-\delta} = x_{\delta(N+1)} - x_{\delta(N)} = (2(N+1)+1)\frac{\lambda}{4} - (2N+1)\frac{\lambda}{4} = (2N+3)\frac{\lambda}{4} - (2N+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \mathbf{d_{\delta\text{-}\delta} = \frac{\lambda}{2}}$$

☞ **Με τι ισούται η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης κοιλίας του**

Η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης σε αυτόν κοιλίας υπολογίζεται από τη διαφορά:

$$d_{\kappa-\delta} = \left|x_{\delta(N)} - x_{\kappa(N)}\right| = \left|(2N+1)\frac{\lambda}{4} - N\frac{\lambda}{2}\right| \Rightarrow \mathbf{d_{\kappa\text{-}\delta} = \frac{\lambda}{4}}$$

☞ **Η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο υλικών σημείων του μέσου στο οποίο δημιουργείται στάσιμο κύμα.**

Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου τα οποία βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών λέμε ότι βρίσκονται στην ίδια άτρακτο. Οι ταλαντώσεις των σημείων αυτών έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια φάση. Επομένως $\Delta\varphi = 0$. Οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται δεξιά και αριστερά του ίδιου δεσμού, αλλά σε απόσταση από αυτόν μικρότερη του $\frac{\lambda}{2}$ (δηλαδή βρίσκονται σε διαδοχικές ατράκτους), έχουν διαφορά φάσης ίση με **$\Delta\varphi = \pi$ rad.**

Παρατήρηση: Όταν μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου μεσολαβεί περιττός αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των σημείων αυτών εμφανίζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης π rad. Όταν μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου δε μεσολαβεί κανένας δεσμός ή μεσολαβεί άρτιος αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των σημείων αυτών εμφανίζουν μεταξύ τους μηδενική διαφορά φάσης.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ

Παρατηρήσεις για την λύση των ασκήσεων

1. Με ποιες προϋποθέσεις ισχύει η εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

Η εξίσωση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ παριστάνει ένα στάσιμο κύμα και ισχύει με τις εξής προϋποθέσεις:

α. Το σημείο Ο που θεωρήσαμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) είναι κοιλία.

β. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει ολοκληρωθεί η συμβολή των δύο αντίθετα διαδιδόμενων κυμάτων κατά μήκος του ελαστικού μέσου και το σημείο Ο (x = 0) βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του έχοντας μέγιστη θετική ταχύτητα.

2. Η κίνηση που εκτελούν τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύμα

α. Η συχνότητα ταλάντωσης

Κάθε υλικό σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύμα (εκτός από τους δεσμούς) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο Τ (ίση με την περίοδο των κυμάτων που συμβάλλουν για τη δημιουργία του στάσιμου) και συχνότητα f.

Όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος παίρνουν ταυτόχρονα την μέγιστη (κατ' απόλυτο) και ελάχιστη τιμή (απομάκρυνση, ταχύτητα, επιτάχυνση) αυτό όμως δεν σημαίνει ότι έχουν ίδιες μέγιστες-στιγμιαίες απομακρύνσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις.

β. Το πλάτος ταλάντωσης

Το πλάτος ταλάντωσης Α' των υλικών σημείων του μέσου στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύμα εξαρτάται από την απόσταση κάθε σημείου από το σημείο Ο που θεωρήσαμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0). Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου υπολογίζεται από τη σχέση: $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$ και παίρνει τιμές από 0 έως 2Α: $0 \le A' \le 2A$

Ένα σημείο που βρίσκεται σε κοιλία διανύει απόσταση 8Α σε κάθε περίοδο (όπου Α το πλάτος των κυμάτων που συμβάλουν προς δημιουργία στάσιμου κύματος.

γ. Η φάση ταλάντωσης

Όλα τα ταλαντούμενα σημεία του υλικού μέσου διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους και βρίσκονται ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης τους.

Τα υλικό σημεία που βρίσκονται **μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους με ίδια κατεύθυνση ταχύτητας, άρα τα σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια φάση**. Τα σημεία που βρίσκονται **εκατέρωθεν ενός δεσμού (σε απόσταση μικρότερη του λ/2) διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους με αντίθετης κατεύθυνσης ταχύτητες, άρα τα σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού έχουν διαφορά φάσης π rad**.

Συμπεραίνουμε ότι στο στάσιμο κύμα δεν έχουμε μετατόπιση φάσης. Δύο σημεία του μέσου στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύμα είτε θα βρίσκονται σε φάση **(Δφ = 0)** είτε θα έχουν αντίθετη φάση **(Δφ = π rad)**.

Η φάση των σημείων του στάσιμου κύματος δίνεται από την σχέση $\varphi = \frac{2\pi}{T}t = \omega t$ ή $\varphi = \frac{2\pi}{T}t + \pi = \omega t + \pi$.

Έτσι είναι προφανές ότι η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του στάσιμου κύματος θα είναι μηδέν ή π

ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΤΟ π ΣΤΗΝ ΦΑΣΗ

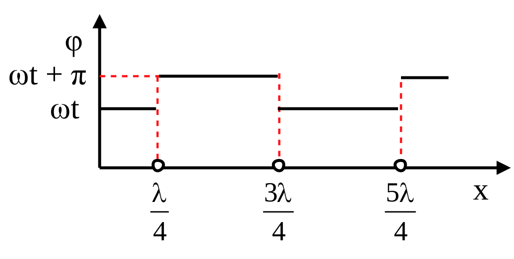
Στην εξίσωση του στάσιμου κύματος αν κάνουμε αντικατάσταση το x στο συνημίτονο το αποτέλεσμα μπορεί να 'ναι είτε θετικό είτε αρνητικό. Έστω $\beta = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} > 0$ τότε $y = \beta\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$. Άρα $\varphi = \frac{2\pi}{T}t = \omega t$

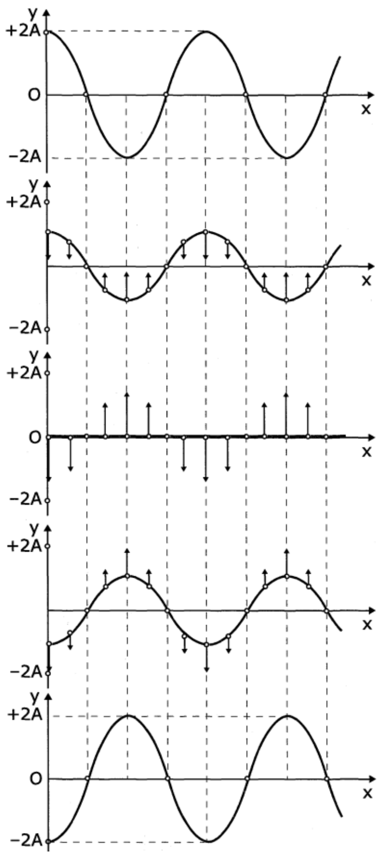
Ενώ αν $\beta < 0 \Rightarrow -|\beta| < 0$ και το κύμα γίνεται: $\beta = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} < 0$ τότε $y = -|\beta|\eta\mu\frac{2\pi}{T}t \Rightarrow y = |\beta|\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

Άρα $\varphi = \frac{2\pi}{T}t + \pi = \omega t + \pi$.

Γραφική παράσταση της φάσης σημείων του στάσιμου κύματος μία ορισμένη χρονική στιγμή.

Όπως είπαμε παραπάνω τα σημεία θα έχουν φάση $\varphi = \omega t$ ή $\varphi = \omega t + \pi$ και αλλάζει από την μία μορφή στη άλλη όταν "περνάμε" ένα δεσμό, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.





Χρονική στιγμή t_1
Όλα τα ταλαντούμενα σημεία βρίσκονται στην ακραία θέση χαλάρωσης τους.

Χρονική στιγμή $t_1 + \Delta t$, $\Delta t < T/4$
Τα ταλαντούμενα σημεία κινούνται προς τη θέση ισορροπίας τους.

Χρονική στιγμή $t_1 + T/4$
Τα ταλαντούμενα σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.

Χρονική στιγμή $t_1 + \Delta t$, $T/4 < \Delta t < T/2$
Τα ταλαντούμενα σημεία κινούνται προς την ακραία θέση ταλάντωσης τους

Χρονική στιγμή $t_1 + T/2$
Τα ταλαντούμενα σημεία βρίσκονται στην ακραία θέση ταλάντωσης τους
(αντίθετη από εκείνη στην οποία βρίσκονταν τη χρονική στιγμή t_1).

δ. Η ταχύτητα ταλάντωσης

Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας κάθε σημείου του μέσου στο οποίο δημιουργείται το στάσιμο κύμα δίνεται από την εξίσωση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$

Η ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου δίνεται από την εξίσωση: $\boldsymbol{\upsilon = \omega 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}}$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου εξαρτάται από την απόσταση τους από τη θέση x = 0 και έχει μέτρο: $\boldsymbol{\upsilon_{max} = \omega 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|}$

Οι κοιλίες του στάσιμου κύματος ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος (A' = 2A) και έχουν μέγιστη ταχύτητα ($\upsilon_{max,\,K} = \omega\cdot 2A$), η οποία είναι μεγαλύτερη από τις μέγιστες ταχύτητες όλων των υπόλοιπων ταλαντούμενων σημείων.

3. Η ενέργεια στα στάσιμα κύματα

Εφόσον κατά μήκος του ελαστικού μέσου στο οποίο δημιουργείται στάσιμο κύμα υπάρχουν σημεία τα οποία παραμένουν συνεχώς ακίνητα, συμπεραίνουμε ότι δε μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο του στάσιμου κύματος στο άλλο. **Η ενέργεια που είχαν τα αρχικά κύματα, η συμβολή των οποίων δημιουργεί το στάσιμο κύμα, εγκλωβίζεται ανάμεσα στους δεσμούς**. Κάθε σημείο του μέσου, ανάλογα με τη θέση του, αποκτά ορισμένο ποσό ενέργειας, η οποία μετατρέπεται συνεχώς από κινητική ενέργεια, όταν τα σημεία του μέσου διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, σε ελαστική δυναμική ενέργεια, όταν τα σημεία βρίσκονται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης τους. Σε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις της ταλάντωσης τους, τα σημεία του μέσου έχουν και κινητική και δυναμική ενέργεια.

4. Διαφορές τρέχοντος και στάσιμου κύματος

Τρέχον κύμα	Στάσιμο κύμα
1. Όλο τα υλικά σημεία του μέσου ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος.	**1.** Το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου εξαρτάται από τη θέση κάθε σημείου και παίρ-νει τιμές οπό A' = 0 (δεσμοί) μέχρι A' = 2A (κοιλίες).
2. Μεταφέρεται ενέργεια.	**2.** Η ενέργεια δεν μεταφέρεται, παραμένει εγκλωβι-σμένη μεταξύ των δεσμών.
3. Την ιδία χρονική στιγμή όλα τα σημεία του μέσου έχουν διαφορετικές φάσεις: όσο πιο απομακρυσμένο οπό την πηγή είναι ένα σημείο τόσο μικρότερη είναι η φάση του. Δύο υλικά σημεία του μέσου μπορεί να έχουν οποιοδήποτε διαφορά φάσης.	**3.** Τα υλικά σημεία του μέσου έχουν είτε την ίδια φά-ση (αν βρίσκονται ανάμεσα από δύο δεσμούς) είτε δι-αφορά φάσης π rad (αν βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και σε απόσταση μικρότερη από λ/2 από αυ-τόν.
4. Το υλικά σημεία του μέσου διέρχονται από τη θέ-ση ισορροπίας τους σε διαφορετικές χρονικές στιγ-μές.	**4.** Τα υλικά σημείο του μέσου διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους.
5. Κάθε σημείο του μέσου από το οποίο διέρχεται το κύμα εκτελεί ταλάντωση.	**5.** Υπάρχουν υλικά σημείο στο μέσο διάδοσης τα ο-ποίο παραμένουν συνεχώς ακίνητα.
6. Διαδίδεται σε ορισμένη διεύθυνση,	**6.** Δεν διαδίδεται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Η εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ παριστάνει στάσιμο κύμα με τα εξής χαρακτηριστικά:

α. Σχηματίζεται από δύο κύματα ίδιου πλάτους Α και ίδιας συχνότητας f, τα οποία διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

β. Οι απομακρύνσεις που προκαλούνται από καθένα από τα κύματα σε ένα σημείο Ο του μέσου, το οποίο θε-ωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0), περιγράφονται από την ίδια εξίσωση: $y = A\eta\mu\omega t$

γ. Ως αρχή μέτρησης των χρόνων ($t_0 = 0$) θεωρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση του σημείου Ο είναι μηδέν, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σημείο Ο έχει απομάκρυνση $y = 0$ και θετική ταχύτητα.

δ. Το κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x′Ox περιγράφεται από την εξίσωση:

$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ενώ το κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

2. Αν δίνεται η εξίσωση του στάσιμου κύματος, αντιπαραβάλλουμε με τη γενική μορφή:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$$

και υπολογίζουμε το πλάτος Α, το μήκος κύματος λ και την περίοδο Τ των συμβαλλόμενων κυμάτων.

Εφαρμογή

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται κατά μήκος ελαστικού μέσου οπό τη συμβολή δύο κυμάτων τα οποία διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0{,}04\sigma\upsilon\nu 10\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t$ S.I. Να υπολογίσετε το πλάτος Α, το μήκος κύματος λ, την περίοδο Τ και την ταχύτητα διάδοσης των συμβαλλόμενων κυμάτων και να γράφετε τις εξισώσεις τους.

Λύση

Αντιπαραβάλλουμε τη δοθείσα εξίσωση με τη γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος

$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ και προκύπτει ότι:

- $2A = 0{,}04\ m \Rightarrow A = 0{,}02\ m$
- $\frac{2\pi x}{\lambda} = 10\pi x \Rightarrow \lambda = 0{,}2\ m$
- $\frac{2\pi t}{T} = 20\pi t \Rightarrow T = 0{,}1\ s$, άρα και $f = 10\ Hz$

Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης των συμβαλλόμενων κυμάτων από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 2\ m/s$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα δύο κύματα είναι: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = 0{,}02\eta\mu 2\pi(10t-5x)$ S.I.

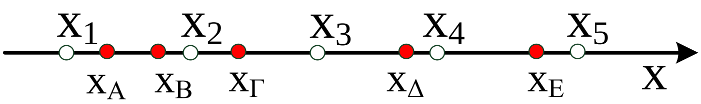
$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = 0{,}02\eta\mu 2\pi(10t+5x)$ S.I.

3. Πως βρίσκουμε την διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων

1ος τρόπος : Με απευθείας αντικατάσταση των θέσεων των σημείων x_A , x_B στην εξίσωση του στάσιμου κύματος και αναλόγως τι θα βγει το συνημίτονο θετικό ή αρνητικό βρίσκουμε τη διαφορά φάσης.

2ος τρόπος : Από την εξίσωση των δεσμών $x = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}$ βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών και μετά ελέγχουμε αν μεταξύ των σημείων μας υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών ή βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού οπότε $\Delta\varphi = \pi$ ενώ αν τα σημεία μας βρίσκονται ανάμεσα σε δύο δεσμούς ή μεταξύ τους παρεμβάλλεται άρτιος αριθμός δεσμών τότε θα έχουμε $\Delta\varphi = 0$

Παράδειγμα έστω x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 δεσμοί του στάσιμου κύματος (οι άσπρες κουκίδες)



$\Delta\varphi_{AB} = 0$

$\Delta\varphi_{A\Gamma} = \pi$

$\Delta\varphi_{A\Delta} = 0$

$\Delta\varphi_{AE} = \pi$

$\Delta\varphi_{B\Gamma} = \pi$ κ.τ.λ.

4. Πως βρίσκουμε την απόσταση κάποιου σημείου από τον κοντινότερο δεσμό ή την κοντινότερη κοιλία

Αυτό το ερώτημα είναι αρκετά απλό αφού αρκεί να βρούμε τις θέσεις των κοιλιών ή δεσμών ανάλογα και μετά να βρούμε την διαφορά του συγκεκριμένου σημείου μας από τον κοντινότερο δεσμό ή κοιλία αντίστοιχα.

5. Πως βρίσκουμε την μεταβολή που πρέπει να έχει το μήκος κύματος ώστε ένα σημείο να γίνει η επόμενη κοιλία η ο επόμενος δεσμός κ.τ.λ.

Εφαρμογή: Έστω το σημείο Μ είναι ο τρίτος κατά σειρά δεσμός πόσο πρέπει να μεταβληθεί το μήκος κύματος ώστε να γίνει:

α. ο τέταρτος δεσμός

β. η επόμενη κοιλία.

Λύση

α. Αφού το σημείο Μ είναι ο τρίτος δεσμός θα απέχει από την αρχή $\ell = \frac{5\lambda}{4}$ για να γίνει ο τέταρτος δεσμός του νέου στάσιμου κύματος θα πρέπει να ισχύει $\ell = \frac{7\lambda_1}{4}$ οπότε: $\frac{5\lambda}{4} = \frac{7\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{7}\lambda$

β. Για να γίνει η επόμενη κοιλία (δηλαδή η τέταρτη) θα πρέπει $\ell = 2\lambda_2$ άρα $\frac{5\lambda}{4} = 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{5\lambda}{8}$

6. Πως βρίσκουμε ποια άλλα ή πόσα άλλα σημεία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με δοσμένο σημείο

Για την αντιμετώπιση αυτού του ερωτήματος υπάρχουν δυο τρόποι:

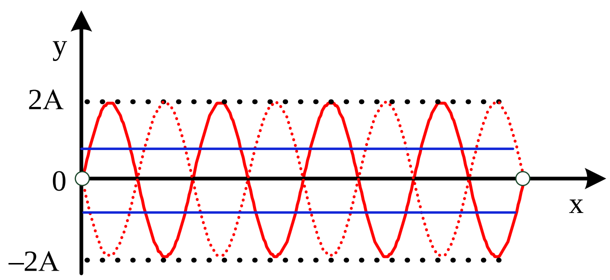
1^{ος} τρόπος :

α. Βρίσκουμε το πλάτος του συγκεκριμένου σημείου αν δεν μας το έχουν δώσει από την εξίσωση του κύματος (αν την ξέρουμε) ή από την εξίσωση του πλάτους αν ξέρουμε την θέση

β. Αυτό που βρήκαμε πιο πάνω το κάνουμε αντικατάσταση στην εξίσωση του πλάτους $A' = 2A\left|\text{συν}\frac{2\pi\chi}{\lambda}\right|$ και επειδή όπως βλέπουμε στην εξίσωση υπάρχει απόλυτη τιμή θα πρέπει να βρούμε 4 σειρές λύσεων , δύο για την θετική τιμή του συνημιτόνου και δύο για την αρνητική τιμή (Τα παραπληρωματικά συνημίτονα έχουν αντίθετες τιμές). Ή να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις για τις απόλυτες τιμές που αναφέρονται στο τυπολόγιο των ταλαντώσεων.

2^{ος} τρόπος:

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος σε δύο τυχαίες χρονικές στιγμές που η κοιλία στη θέση x = 0 βρίσκεται στην μέγιστη και την ελάχιστη απομάκρυνση y = ±2A και φέρνουμε μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των θέσεων (x) στην συγκεκριμένη απομάκρυνση (π.χ.



$y = \pm A/5$) και μετράμε πόσα σημεία τέμνει η ευθεία (η μπλε) το στιγμιότυπο του κύματος και έτσι βρίσκουμε πόσα σημεία ταλαντώνονται με κάποιο συγκεκριμένο πλάτος όπως στο παραπάνω σχήμα.

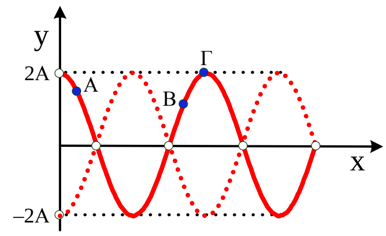
Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα αυτού του τρόπου

α. Μπορούμε να βρούμε πόσα σημεία ταλαντώνονται με κάποιο συγκεκριμένο πλάτος όχι όμως και τις θέσεις τους

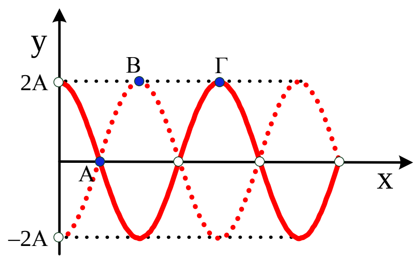
β. Μπορούμε να βρίσκουμε πόσα σημεία έχουν κάποιο συγκεκριμένο πλάτος για πλάτη που τριγωνομετρικά είναι αδύνατο να υπολογίσουμε χωρίς επιστημονική αριθμομηχανή

7. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του στάσιμου κύματος

Όταν σε ένα ελαστικό μέσο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα τότε δύο σημεία μπορεί να έχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση αλλά μπορεί και να μεταβάλλεται μεταξύ δύο τιμών. Για να δούμε πως συμβαίνει αυτό:



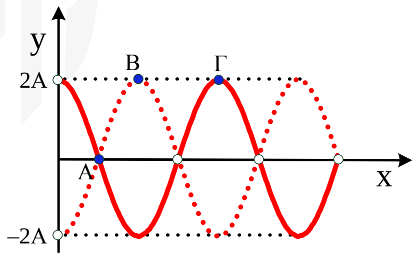
πρώτη περίπτωση: αν η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων είναι μηδέν και ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος τότε η απόσταση τους κατά την διάρκεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή και ίση με την οριζόντια απόσταση που έχουν τα δύο σημεία όταν περνάν από την θέση ισορροπίας. Στο σχήμα τα σημεία Α και Β έχουν σταθερή οριζόντια απόσταση. Τα σημεία όμως Α και Γ ή Β και Γ παρόλο που είναι σε συμφωνία φάσης η απόσταση τους μεταβάλλεται με την μικρότερη τιμή να την έχει όταν βρίσκονται τα δύο σημεία στη θέση ισορροπίας και την μέγιστη όταν βρίσκονται σε ακραίες θέσεις (δεν θα αναλύσουμε την περίπτωση γιατί δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον).



δεύτερη περίπτωση: αν η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων είναι π και αυτά είναι κοιλίες ή μια κοιλία και ένας δεσμός τότε η απόσταση παίρνει τιμές $2N+1\,\frac{\lambda}{2} \le d \le \sqrt{\left[2N+1\,\frac{\lambda}{2}\right]^2 + (4A)^2}$ για δύο κοιλίες (όπου Ν ο αριθμός των κοιλιών που παρεμβάλλονται ανάμεσα στα δύο σημεία. π.χ. αν έχουμε δύο διαδοχικές κοιλίες τότε Ν = 0) και $\frac{\lambda}{4} \le d \le \sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + (2A)^2}$ για κοιλία και δεσμό (όπου Ν ο αριθμός των κοιλιών που παρεμβάλλονται ανάμεσα στα δύο σημεία).

Να θυμίσουμε ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για διαφορά φάσης ανάμεσα σε δεσμό και κοιλία ή οτιδήποτε άλλο.

Εφαρμογή: Η απόσταση ανάμεσα στα σημεία Α και Β του σχήματος παίρνει τιμές 6 cm ≤ d ≤ 10 cm. Να βρεθεί το μήκος κύματος και το πλάτος των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα.



Λύση: Αφού το σημείο Α είναι δεσμός και το Β κοιλία η ελάχιστη τους απόσταση θα είναι λ/4 (όταν το Β περνά από τη θέση ισορροπίας του).

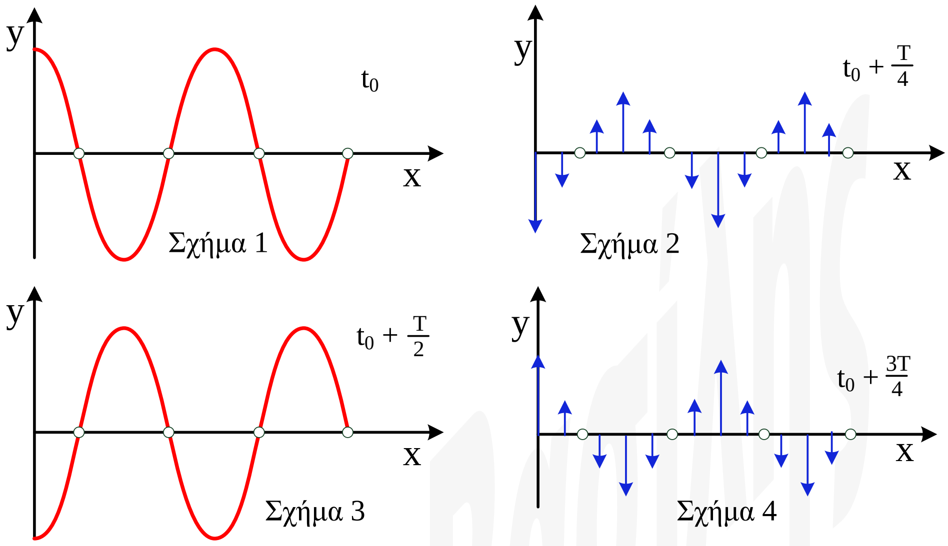
Άρα $\frac{\lambda}{4} = 6\,cm \Rightarrow \lambda = 24\,cm$ (θέσαμε Ν = 0 αφού ανάμεσα στο Α και το Β "παρεμβάλλονται μηδέν" κοιλίες).

Η μέγιστη απόσταση (όταν το Β βρίσκεται σε ακραία θέση) θα είναι:

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + (2A)^2} = 10 \Rightarrow 36 + (2A)^2 = 100 \Rightarrow A = 4\,cm.$$

8. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος

Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος διακρίνεται σε 4 φάσεις που απέχουν χρονικά $\frac{T}{4}$ και επαναλαμβάνεται κυκλικά σε κάθε περίοδο Τ. Βέβαια μπορεί να μας ζητηθεί να κατασκευάσουμε το κύμα και κάποια άλλη χρονική στιγμή (αν και κάπως απίθανο) εκτός των στιγμών $\frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$ δεν υπάρχει κάποια ουσιαστική διαφορά απλώς οι άλλες κυματομορφές θα έχουν μικρότερο πλάτος, όπως στα παρακάτω σχήματα.



Για να κατασκευάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος ακολουθούμε τα εξής βήματα

i. Βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών $x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4}$

ii. Αντικαθιστούμε την χρονική στιγμή t_o (που μας ζητείται το στιγμιότυπο) στην εξίσωση του στάσιμου κύματος και παίρνουμε την εξίσωση y = f(x) ή y = 0 στην περίπτωση που δεν μας βγει y = 0 (όλα τα σημεία στη θέση ισορροπίας) δίνουμε τιμές στο x και σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος (κατάλληλες τιμές x = 0 και x = λ / 4) και όπως φαίνεται από τα σχήματα έχουμε 4 διαφορετικές εικόνες

Τα παραπάνω στιγμιότυπα αναφέρονται σε κάποια χρονική στιγμή t_o που έχουν y = +2A

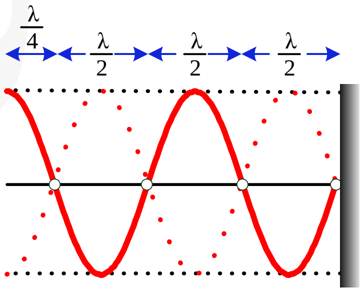
Όπως βλέπουμε στα σχήματα 2 και 4 όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος έχουν μηδενική απομάκρυνση γι' αυτό σχεδιάζουμε τα βελάκια που μας δείχνουν την κατεύθυνση που θα κινηθούν τα σημεία την επόμενη χρονική στιγμή (Προφανώς τα βελάκια δεν θα έχουν το ίδιο μήκος γιατί όλα τα σημεία δεν έχουν το ίδιο μέτρο στην ταχύτητα τους. Άλλωστε στο στάσιμο κύμα όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου παίρνουν ταυτόχρονα την μέγιστη (κατ' απόλυτη τιμή) και ελάχιστη απομάκρυνση και για να συμβεί αυτό (αφού έχουν διαφορετικές αποστάσεις να διανύσουν) θα πρέπει να έχουν διαφορετικές ταχύτητες)

9. Η διατήρηση της ενέργειας

Η ενέργεια ενός σωματιδίου του μέσου διάδοσης στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύματα διατηρείται σταθερή κατά την ταλάντωση του. Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}D^2y^2$$

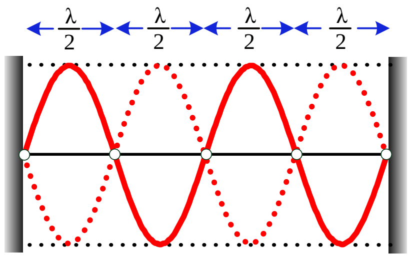
10. Σχηματισμός στάσιμου κύματος κατά μήκος ελαστικής χορδής, το ένα άκρο της οποίας είναι δεμένο σε σταθερό σημείο



Στάσιμο κύμα σχηματίζεται κατά μήκος της χορδής όταν το μήκος d της χορδής και το μήκος κύματος λ των κυμάτων που συμβάλλουν συνδέονται με τη σχέση: $d = (k-1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

όπου k ο αριθμός των σημείων που παραμένουν συνεχώς ακίνητα ή ο αριθμός των κοιλιών, λ/2 η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακίνητων σημείων και λ/4 η απόσταση του ελεύθερου άκρου της χορδής (κοιλία) από τον πλησιέστερο σε αυτή δεσμό.

11. Σχηματισμός στάσιμου κύματος κατά μήκος ελαστικής χορδής, τα δύο άκρα της οποίας είναι δεμένα σε σταθερά σημεία



Στάσιμο κύμα σχηματίζεται κατά μήκος της χορδής όταν το μήκος d της χορδής και το μήκος κύματος λ των κυμάτων που συμβάλλουν συνδέονται με τη σχέση: $d = (k-1)\frac{\lambda}{2}$ όπου k ο αριθμός των σημείων που παραμένουν συνεχώς ακίνητα και λ/2 η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακίνητων σημείων, ή $d = k\frac{\lambda}{2}$ όπου k ο αριθμός των κοιλιών.

12. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων της χορδής

α. Στον τύπο υπολογισμού του πλάτους ταλάντωσης των σημείων της χορδής $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|$

το x είναι η θέση του σημείου κατά μήκος του άξονα x′Ox και είναι $x > 0$ για σημεία του θετικού ημιάξονα και $x < 0$ για σημεία του αρνητικού ημιάξονα.

β. Για να εξετάσουμε αν ένα σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο σχηματίζεται στάσιμο κύμα είναι κοιλία ή δεσμός του στάσιμου κύματος, μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Αντικαθιστούμε τη θέση x του σημείου κατά μήκος του άξονα x′Ox ($x > 0$ για σημεία του θετικού ημιάξονα και $x < 0$ για σημεία του αρνητικού ημιάξονα) είτε στη σχέση $x = k\dfrac{\lambda}{2}$ (για να εξετάσουμε αν είναι κοιλία) είτε στη σχέση $x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$ (για να εξετάσουμε αν είναι δεσμός). Αν είναι κοιλία ή δεσμός θα προκύπτει ακέραιος αριθμός k ($k > 0$ για σημεία του θετικού ημιάξονα και $k < 0$ για σημεία του αρνητικού ημιάξονα). Αν το k δεν προκύψει ακέραιος από καμία από τις δύο σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι το σημείο ταλαντώνεται με πλάτος $0 < A' < 2A$.

2ος τρόπος: Αντικαθιστούμε την τετμημένη x του σημείου στον τύπο υπολογισμού του πλάτους $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|$.

Αν προκύψει $A' = 2A$ το σημείο είναι κοιλία, ενώ αν προκύψει $A' = 0$ είναι δεσμός.

13. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κάθε σημείου της χορδής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{max} = \omega A' = \omega \cdot 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|.$$