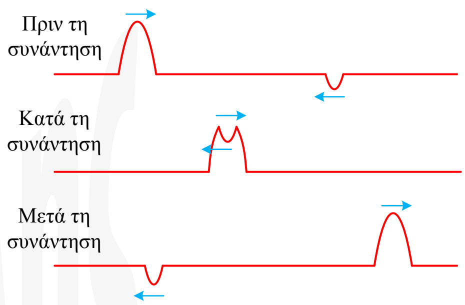
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ (ή ΥΠΕΡΘΕΣΗ) ΚΥΜΑΤΩΝ



Θεωρούμε ότι κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κυματικοί παλμοί που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο κυματικών παλμών που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τη στιγμή της συνάντησης τα σημεία του ελαστικού μέσου **έχουν απομάκρυνση ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων** που θα είχαν αν οι δύο παλμοί διαδίδονταν ξεχωριστά.

☞ **Πώς διατυπώνεται η αρχή της επαλληλίας (ή υπέρθεσης) κυμάτων;**

Όταν σ' ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα, η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα.

Τα κυματικά φαινόμενα που απαντώνται στη φύση είναι αρκετά σύνθετα. Με βάση την αρχή της επαλληλίας μπορούμε να θεωρούμε ότι **ένα σύνθετο κύμα είναι το αποτέλεσμα της επαλληλίας ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος**. Έτσι, ένα σύνθετο κύμα αναλύεται σε περισσότερα απλά αρμονικά κύματα.

☞ **Ποια συμπεράσματα προκύπτουν από την επαλληλία δύο κυμάτων που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο;**

α. Τα κύματα διέρχονται το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να μεταβάλλονται.

β. Τα κύματα δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

γ. Κάθε κύμα διαδίδεται σα να μην υπήρχε το άλλο.

δ. Η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου από τη θέση ισορροπίας του είναι ανεξάρτητη από την παρουσία του άλλου κύματος.

☞ Πότε παραβιάζεται η αρχή της επαλληλίας

Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται μόνο στην περίπτωση που τα κύματα είναι τόσο **ισχυρά**, ώστε να **μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται**. Στην περίπτωση αυτή, οι δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων του μέσου δεν είναι ελαστικές και κατά συνέπεια δε δρουν ως δυνάμεις επαναφοράς. Τέτοιες περιπτώσεις παραβίασης της αρχής της επαλληλίας έχουμε **στα κύματα** που δημιουργούνται **από μια έκρηξη**.

☞ Πότε δύο πηγές κυμάτων είναι σύμφωνες και πότε σύγχρονες

Σύμφωνες ονομάζονται δύο πηγές όταν η **διαφορά φάσης** των ταλαντώσεων τους παραμένει **σταθερή**. Οι **σύμφωνες** πηγές έχουν την **ίδια συχνότητα και διαφορετική αρχική φάση**.

Σύγχρονες ονομάζονται δύο πηγές όταν η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων τους είναι συνεχώς ίση με μηδέν. Οι σύγχρονες πηγές έχουν την ίδια συχνότητα και την ίδια αρχική φάση.

☞ Ποιο φαινόμενο ονομάζεται συμβολή

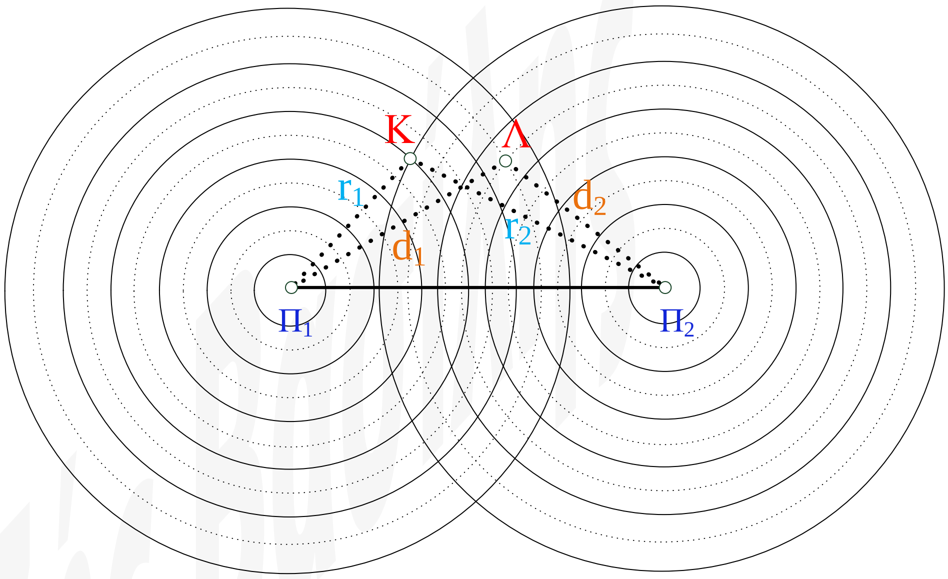
Συμβολή ονομάζεται το αποτέλεσμα της επαλληλίας δύο ή περισσότερων κυμάτων τα οποία διαδίδονται ταυτόχρονα στην ίδια περιοχή του ελαστικού μέσου.

Αν τα κύματα που διαδίδονται είναι στο ίδιο επίπεδο και η διεύθυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου είναι ίδια και για τα δύο κύματα, τότε η απομάκρυνση κάθε σημείου του ελαστικού μέσου είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων που προκαλεί κάθε κύμα ξεχωριστά στο σημείο αυτό.

Μελετώντας τη συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται στην επιφάνεια ενός υγρού, διαπιστώνουμε ότι **υπάρχουν σημεία που παραμένουν ακίνητα και σημεία που ταλαντώνονται πολύ έντονα**.

☞ Πότε λέμε ότι σ' ένα σημείο του μέσου διάδοσης συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και πότε ακυρωτική συμβολή

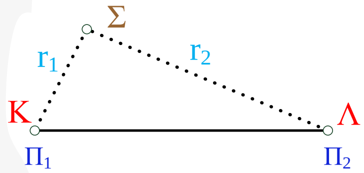
Θεωρούμε ότι στα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της επιφάνειας ενός υγρού υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων του ίδιου πλάτους που ταλαντώνονται κατακόρυφα, με αποτέλεσμα να δημιουργούν ταυτόχρονα μέγιστα ("όρη") και ταυτόχρονα ελάχιστα ("κοιλάδες").



Τα κύματα που ξεκινούν ταυτόχρονα από τις πηγές φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Α της μεσοκαθέτου $Π_1Π_2$. Συνεπώς, όταν στο σημείο Κ φτάνει "όρος" από την πηγή $Π_1$, θα φτάνει "όρος" και από την πηγή $Π_2$. Το αποτέλεσμα, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, θα είναι να δημιουργηθεί "όρος" στο σημείο Κ με διπλάσιο ύψος. Μετά από χρόνο $\frac{T}{2}$ φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Κ δύο "κοιλάδες", με αποτέλεσμα να εμφανίζεται τώρα στο σημείο αυτό κοιλάδα με διπλάσιο βάθος. Όταν συμβαίνουν τα παραπάνω, λέμε ότι τα κύματα **συμβάλλουν ενισχυτικά** στο σημείο Κ.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν σημεία στα οποία τα κύματα αλληλοαναιρούνται. Ένα τέτοιο σημείο είναι το σημείο Λ. Στο σημείο αυτό φτάνει ταυτόχρονα "όρος" από τη μια πηγή και "κοιλάδα" από την άλλη. Το αποτέλεσμα είναι τα κύματα να αλληλοαναιρούνται και το σημείο Λ να παραμένει ακίνητο. Τότε λέμε ότι τα κύματα **συμβάλλουν ακυρωτικά** στο σημείο Λ.

☞ **Ποια είναι η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης ενός σημείου του μέσου διάδοσης στο οποίο συμβάλλουν δύο αρμονικά κύματα**



Υποθέτουμε ότι δύο σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της επιφάνειας του υγρού είναι σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους που έχουν εξίσωση $y = Aημ\frac{2π}{T}t$. Επειδή τα κύματα διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα, θα έχουν και το ίδιο μήκος κύματος. Θεωρούμε ένα σημείο Σ της επιφάνειας το οποίο απέχει αποστάσεις x_1 και x_2 από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα. Η απομάκρυνση του σημείου Σ που οφείλεται σε κάθε κύμα χωριστά υπολογίζεται κάθε χρονική στιγμή από τις εξισώσεις:

$$y_1 = Aημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{λ}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = Aημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{λ}\right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση του υλικού σημείου Σ κάθε χρονική στιγμή t είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των απομακρύνσεων y_1 και y_2. Άρα:

$$y = y_1 + y_2 = A\left[ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{λ}\right)+ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{λ}\right)\right]$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $ημα + ημβ = 2συν\frac{α-β}{2}\cdot ημ\frac{α+β}{2}$ καταλήγουμε στον τύπο: $\mathbf{y = 2Aσυν\frac{2π(r_1-r_2)}{2λ}ημ2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2λ}\right)}$

Από την τελευταία αυτή σχέση συμπεραίνουμε ότι κάθε σημείο του μέσου διάδοσης εκτελεί ταλάντωση με την ίδια συχνότητα και με πλάτος που εξαρτάται από τις αποστάσεις του σημείου από τις δύο πηγές. Το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\mathbf{A' = \left|2Aσυν\frac{2π(r_1-r_2)}{2λ}\right|}$ και η φάση της ταλάντωσης από τη σχέση: $\mathbf{φ = 2π\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2λ}\right)}$

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

☞ **Ποια σχέση ικανοποιούν οι αποστάσεις r_1 και r_2 από τις πηγές για τα σημεία στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή:**

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο και ίσο με 2Α στα σημεία όπου οι αποστάσεις τους r_1 και r_2 από τις δύο πηγές ικανοποιούν τη σχέση: $\text{συν}\dfrac{2\pi(r_1-r_2)}{2\lambda}=\pm1 \Rightarrow \dfrac{\pi|r_1-r_2|}{\lambda}=N\pi \Rightarrow \mathbf{|r_1-r_2|=N\lambda}$ όπου $N = 0,1,2,...$

ή $\mathbf{r_1 - r_2 = N\lambda}$, όπου $N = 0,\pm1,\pm2,...$

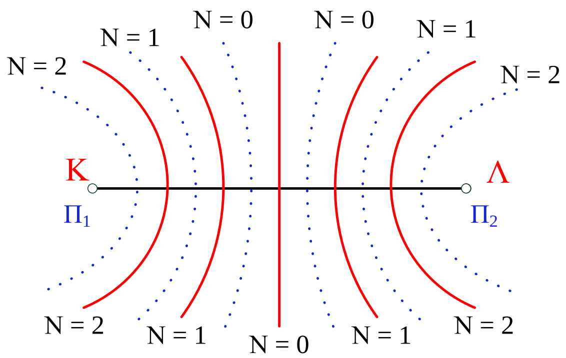
☞ **Ποια σχέση ικανοποιούν οι αποστάσεις x_1 και x_2 από τις πηγές για τα σημεία στα οποία συμβαίνει ακυρωτική συμβολή:**

Τα σημεία που παραμένουν ακίνητα είναι εκείνα των οποίων οι αποστάσεις x_1 και x_2 από τις δύο πηγές ικανοποιούν τη σχέση: $\text{συν}\dfrac{2\pi(r_1-r_2)}{2\lambda}=0 \Rightarrow \dfrac{\pi|r_1-r_2|}{\lambda}=(2N+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{|r_1-r_2|=(2N+1)\dfrac{\lambda}{2}}$, όπου $N = 0,1, 2,...$

ή $\mathbf{r_1-r_2=(2N+1)\dfrac{\lambda}{2}}$, όπου $N = 0, \pm 1, \pm2,...$

Είναι γνωστό ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία ισχύει $r_1 - r_2 =$ σταθ. είναι υπερβολή. Κατά συνέπεια, τα σημεία στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και τα σημεία στα οποία συμβαίνει ακυρωτική συμβολή βρίσκονται πάνω σε υπερβολές (εκτός από τα σημεία που βρίσκονται στη μεσοκάθετο του $Π_1Π_2$).

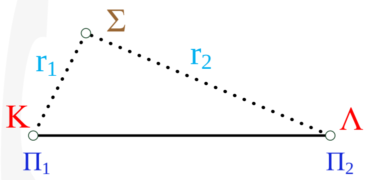
Στο σχήμα φαίνονται με μπλε διακεκομμένη γραμμή οι υπερβολές ακυρωτικής συμβολής και με συνεχόμενη κόκκινη γραμμή οι υπερβολές ενισχυτικής συμβολής.



Παρατήρηση: Πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω μελέτη της συμβολής αφορούσε δύο κύματα οι πηγές των οποίων έχουν κάθε στιγμή την ίδια φάση. Συμβολή όμως συμβαίνει σε κάθε περίπτωση όπου δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο μέσο, ανεξάρτητα αν προέρχονται από συμφασικές πηγές ή όχι.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Μελέτη της κίνησης ενός υλικού σημείου του μέσου στο οποίο συμβάλλουν δύο κύματα



Έστω δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$, οι οποίες βρίσκονται σε επαφή με την ήρεμη επιφάνεια υγρού και παράγουν αρμονικά κύματα του ίδιου πλάτους Α και της ίδιας συχνότητας, χωρίς αρχική φάση. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Σ του ελαστικού μέσου το οποίο απέχει, αντίστοιχα, r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) από τις δύο πηγές. Τα κύματα διαδίδονται στο ελαστικό μέσο με την ίδια ταχύτητα. Στο σημείο Σ φτάνει πρώτα το κύμα από την πλησιέστερη πηγή $Π_1$ (τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{υ}$) και στη συνέχεια το κύμα από την πιο απομακρυσμένη πηγή $Π_2$ (τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{υ}$). Η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του που οφείλεται σε καθένα από τα δύο κύματα είναι: $y_1 = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right)$ και $y_2 = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{λ}\right)$

Έχουμε αναλυτικά:

- **$0 \le t < t_1 = \frac{r_1}{υ}$**

Σε αυτό το χρονικό διάστημα **κανένα από τα δύο κύματα δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ**, επομένως το σημείο Σ δεν έχει αρχίσει να ταλαντώνεται: **$y_Σ = 0$ για $0 \le t < t_1$**

- **$t_1 \le t < t_2 = \frac{r_2}{υ}$**

Τη χρονική στιγμή t_1 **φτάνει στο σημείο Σ το κύμα από την πλησιέστερη πηγή $Π_1$**, οπότε το σημείο Σ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση: **$y_1 = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right)$ για $t_1 \le t < t_2$**

- **$t_2 \le t$**

Τη χρονική στιγμή t_2 **φτάνει στο σημείο Σ και το κύμα από την πιο απομακρυσμένη πηγή $Π_2$**, οπότε η συνολική απομάκρυνση y του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του ισούται με το άθροισμα των απομακρύνσεων y_1 και y_2 που οφείλονται σε καθένα από τα δύο κύματα. Η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του θα είναι: $y = y_1 + y_2 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)}$ **για $t \geq t_2$**

Συνοψίζοντας:

1. Το πλάτος κάθε σημείου στο χώρο εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις των δύο πηγών από το σημείο (και συγκεκριμένα από τη διαφορά των αποστάσεων) και είναι πάντα θετικό

2. Το συνημίτονο στο πλάτος έχει απόλυτη τιμή όχι όμως και στην εξίσωση της απομάκρυνσης

3. Υπάρχουν σημεία που μένουν διαρκώς ακίνητα και σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος

4. Η κίνηση όλων των σημείων είναι απλή αρμονική ταλάντωση (εκτός των σημείων που ανήκουν σε υπερβολές αναίρεσης και παραμένουν διαρκώς ακίνητα) και μπορούμε να βρούμε την εξίσωση τους αντικαθιστώντας τα r_1, r_2 στην εξίσωση της συμβολής

Συμβολή δύο πηγών σε κάποιο σημείο με αρχική φάση

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} + \varphi_{01}\right) \\ y_2 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} + \varphi_{02}\right) \end{aligned}\right\} \mathbf{y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\eta\mu\left(\omega t - \pi\frac{r_1 + r_2}{\lambda} + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right)}$$

Με πλάτος $\mathbf{A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right|}$

Αν στην παραπάνω εξίσωση θέσουμε $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi$ τότε προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} + \varphi\right) \\ y_2 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} + \varphi\right) \end{aligned}\right\} y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t - \pi\frac{r_1 + r_2}{\lambda} + \varphi\right)$$

Με πλάτος $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right|$

Όπως βλέπουμε για $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi$ δεν επηρεάζεται η εξίσωση του πλάτους, ενώ για $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$ προκύπτει ο γνωστός μας τύπος της συμβολής.

Παρατηρήσεις

1. Σε κάθε περίπτωση κατά την οποία ζητείται η απομάκρυνση ενός σημείου του υλικού μέσου από τη θέση ισορροπίας του σε μία χρονική στιγμή, ελέγχουμε αν αυτή τη χρονική στιγμή έχει φτάσει κάποιο από τα κύματα στο σημείο ή έχουν φτάσει και τα δύο κύματα σε αυτό και στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη χρονική στιγμή στην αντίστοιχη εξίσωση για να υπολογίσουμε την απομάκρυνση του σημείου από τη θέση ισορροπίας του.

2. Από τη χρονική στιγμή κατά την οποία έχουν φτάσει και τα δύο κύματα στο σημείο και έπειτα:

α. για να υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου χρησιμοποιούμε τη σχέση: $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right|$

β. για να υπολογίσουμε την απομάκρυνση y του σημείου από τη θέση ισορροπίας του κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιούμε τη σχέση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

γ. η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \omega \cdot 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

όπου η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου είναι: $\boxed{\upsilon_{max} = \omega A' = \omega 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right|}$

3. Για να εξετάσουμε αν ένα σημείο του μέσου αποτελεί σημείο ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής, μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

$1^{ος}$ τρόπος: Υπολογίζουμε τη διαφορά των αποστάσεων του από τις δύο πηγές:

Αν $\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda} = N$, όπου N = 0, 1, 2, ..., τότε **A' = 2A**

Αν $\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda} = \frac{2N+1}{2}$ (δηλαδή το κλάσμα είναι 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, ...), όπου N = 0, 1, 2, ..., τότε **A' = 0**

Αν $|r_1 - r_2| \neq N\lambda$ και $|r_1 - r_2| \neq (2N+1)\dfrac{\lambda}{2}$, τότε **$0 < A' < 2A$**

2ος τρόπος: Αντικαθιστούμε τις αποστάσεις r_1 και r_2 του σημείου από τις δύο πηγές στον τύπο υπολογισμού του πλάτους: $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\dfrac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right|$

4. Πλήθος υπερβολών ενίσχυσης και απόσβεσης

Έστω δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 οι οποίες είναι σε επαφή με ελαστικό μέσο και απέχουν μεταξύ τους d.

α. Το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που βρίσκονται σε ενισχυτική συμβολή

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που βρίσκονται σε ενισχυτική συμβολή εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο Σ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές, το οποίο απέχει r_1 και r_2, αντίστοιχα, από καθεμία από τις πηγές. Αν στο σημείο αυτό παρατηρείται ενίσχυση, θα ισχύει:

$r_1 - r_2 = \kappa\lambda$ (1) όπου $\kappa = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Για το σημείο αυτό ισχύει επίσης: $r_1 + r_2 = d$ (2)

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων για να υπολογίσουμε τον αριθμό των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκονται σε ενίσχυση.

Προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2) και έχω $2r_1 = d + \kappa\lambda \Rightarrow r_1 = \dfrac{d}{2} + \kappa\dfrac{\lambda}{2}$ με περιορισμό $0 \le r_1 \le d \Rightarrow$

$$0 \le \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2} \le d \Rightarrow -\frac{d}{2} \le \kappa\frac{\lambda}{2} \le \frac{d}{2} \Rightarrow -d \le \kappa\lambda \le d \Rightarrow \boldsymbol{-\frac{d}{\lambda} \le \kappa \le \frac{d}{\lambda}}$$

Καθένα από αυτά τα σημεία αποτελεί σημείο τομής μιας υπερβολής ενισχυτικής συμβολής και του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ (εκτός των σημείων της μεσοκαθέτου τα οποία βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή).

β. Το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που βρίσκονται σε ακυρωτική συμβολή

Για να υπολογίσουμε το πλήθος των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που βρίσκονται σε ακυρωτική συμβολή εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ένα σημείο Ρ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές, το οποίο απέχει r_1 και r_2, αντίστοιχα, από καθεμία από τις πηγές. Αν στο σημείο αυτό παρατηρείται απόσβεση, θα ισχύει: $r_1 - r_2 = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{2}$ (1), όπου $\kappa = 0, \pm1, \pm2, ...$

Για το σημείο αυτό ισχύει επίσης: $r_1 + r_2 = d$ (2) προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω:

$$2r_1 = d + \kappa\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \text{ με περιορισμό } 0 \le r_1 \le d \Rightarrow$$

$$0 \le \frac{d}{2} + \kappa\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \le d \Rightarrow -\frac{d}{2} - \frac{\lambda}{4} \le \kappa\frac{\lambda}{2} \le \frac{d}{2} - \frac{\lambda}{4} \Rightarrow -d - \frac{\lambda}{2} \le \kappa\lambda \le d - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \mathbf{-\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}}$$

Καθένα από αυτά τα σημεία αποτελεί σημείο τομής μιας υπερβολής ακυρωτικής συμβολής και του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$.

5. Η διατήρηση της ενέργειας

Η ενέργεια ενός σωματιδίου του μέσου διάδοσης στο οποίο συμβάλλουν δύο αρμονικά κύματα διατηρείται σταθερή κατά την ταλάντωση του. Ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow m\omega^2A'^2 = m\upsilon^2 + m\omega^2y^2 \Rightarrow \boldsymbol{\omega^2A'^2 = \upsilon^2 + \omega^2y^2}$$

6. Ταχύτητα ταλάντωσης των διαφόρων σημείων

Η ταχύτητα ταλάντωσης των διαφόρων σημείων δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\upsilon = \omega 2A\,\text{συν}\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\,\text{συν}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)} \text{ μετά την συμβολή.}$$

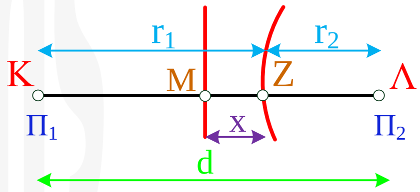
Προσοχή όταν θέλουμε να βρούμε την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου στην επιφάνεια της συμβολής τότε $\boldsymbol{\upsilon_{max} = \omega 2A\left|\text{συν}\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right|}$ ενώ στην εξίσωση της ταχύτητας δεν έχουμε την απόλυτη τιμή

7. Επιτάχυνση των διαφόρων σημείων στην επιφάνεια που συμβάλλουν δύο κύματα

Η επιτάχυνση των διαφόρων σημείων δίνεται από την σχέση $\mathbf{\alpha = -\omega^2 y}$ και αυτός ο τύπος ισχύει γενικά είτε έχουμε συμβολή είτε όχι.

8. Παραμετροποίηση με βάση το κέντρο της ευθείας που ενώνει τις δύο πηγές

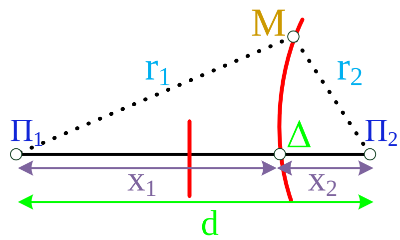
Πολλές φορές στην συμβολή δύο κυμάτων μας ζητείται να βρούμε κάτι που συμβαίνει στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ που ενώνει τις δύο πηγές π.χ. πόσες υπερβολές μέγιστων έχουμε ή πόσο απέχει το σημείο Μ από το κέντρο



κ.τ.λ. Σε αυτή την περίπτωση καλό είναι να κάνουμε τα εξής $|r_1 - r_2| = \left|\frac{d}{2} + x - \left(\frac{d}{2} - x\right)\right| = |2x|$ και το x πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$

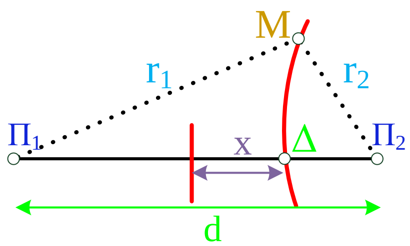
9. Σε ποιο σημείο να κόβει η υπερβολή ενίσχυσης ή αναίρεσης την ευθεία $\Pi_1\Pi_2$

Έστω σημείο Μ που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{|r_1 - r_2| = \kappa\lambda}$ **(1)**.



Η υπερβολή που βρίσκεται το Μ τέμνει την ευθεία $\Pi_1\Pi_2$ στο Δ, έτσι λοιπόν αν θέλουμε να βρούμε πόσο απέχει το σημείο Δ από τις πηγές ή από το κέντρο θα πρέπει να έχουμε υπόψιν ότι ισχύουν τα εξής: $\mathbf{|x_1 - x_2| = \kappa\lambda}$ **(2)** (με κ αυτό που χρησιμοποιήσαμε στη σχέση (1)) και $\mathbf{x_1 + x_2 = d}$ **(3)** (στο παράδειγμά μας $r_1 > r_2$ και $x_1 > x_2$ οπότε μπορούμε να βγάλουμε τις απόλυτες τιμές), έτσι λοιπόν από τις (2) και (3) έχουμε: $\mathbf{x_1 = \frac{d}{2} + \frac{\kappa\lambda}{2}}$ ή $\mathbf{x_1 = \frac{d}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2}}$ και μετά μπορούμε να υπολογίσουμε από την (3) το x_2.

Αν θέλουμε να βρούμε πόσο απέχει από το κέντρο το σημείο Δ χρησιμοποιούμε την παραμετροποίηση με βάση το κέντρο που αναφέρθηκε παραπάνω και τελικά προκύπτει $|r_1 - r_2| = 2|x| \Rightarrow \mathbf{|x| = \frac{|r_1 - r_2|}{2}}$



10. Ποια η ελάχιστη μεταβολή στην συχνότητα ώστε ένα σημείο π.χ. το Μ από σημείο ακυρωτικής συμβολής να γίνει σημείο ενισχυτικής συμβολής.

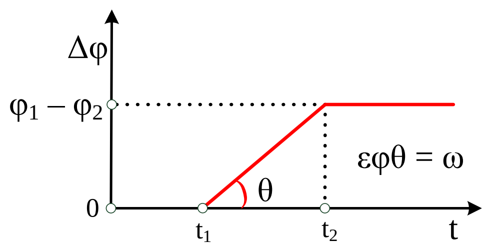
Αρχικά για το σημείο Μ θα ισχύει: $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ και η αρχική συχνότητα είναι: $f = \frac{\upsilon}{\lambda}$

μετά την αλλαγή θα ισχύει: $|r_1 - r_2| = N\lambda' \Rightarrow |r_1 - r_2| = N\frac{\upsilon}{f'} \Rightarrow f' = \frac{N\upsilon}{|r_1 - r_2|}$ από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η ελάχιστη συχνότητα για την οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή στο σημείο Μ είναι για N = 0

$f'_{min} = \frac{\upsilon}{|r_1 - r_2|}$ ενώ όταν θέλουμε την ελάχιστη μεταβολή στην συχνότητα θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνη την τιμή του N για την οποία η συχνότητα f′ είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην συχνότητα f, ώστε η μεταβολή στην συχνότητα να είναι ελάχιστη.

11. Διαφορά φάσης με την οποία τα δύο κύματα φτάνουν στο Μ και η γραφική παράσταση της Δφ = *f*(t)

Τα κύματα που προέρχονται από τις πηγές $\Pi_1\Pi_2$ είναι μεν πανομοιότυπα αλλά έχουν να διανύσουν διαφορετική απόσταση έτσι φτάνουν στο σημείο Μ με διαφορά φάσης:



$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

Όπως βλέπουμε ως τη στιγμή t_1 δεν έχει φτάσει κανένα κύμα μετά την στιγμή t_1 έχει φτάσει το κύμα 1 και η φ_1 αυξάνεται με το χρόνο ενώ μετά την στιγμή t_2 φτάνουν και τα δύο κύματα και έτσι Δφ = σταθερό