ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

☞ **Τι ονομάζουμε κύμα;**

Κύμα ονομάζουμε τη διάδοση μιας διαταραχής από σημείο σε σημείο του χώρου με ορισμένη ταχύτητα.

Η διαταραχή μπορεί να είναι

α. Η ταλάντωση των μορίων του ελαστικού μέσου

β. Η μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας ενός αερίου

γ. Η μεταβολή της έντασης του μαγνητικού πεδίου

Τι μεταφέρει ένα κύμα

Ένα κύμα **μεταφέρει ενέργεια και ορμή** από το ένα σωματίδιο του μέσου στο άλλο, χωρίς όμως να γίνεται ταυτόχρονα μεταφορά μάζας, δηλαδή **χωρίς να μεταφέρεται ύλη.**

Πως μπορούμε να χωρίσουμε τα κύματα σε διάφορες κατηγορίες;

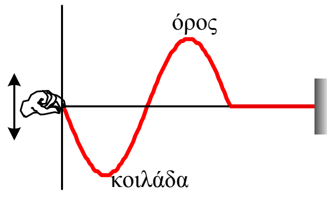
Α. Ανάλογα με το είδος της ενέργειας που μεταφέρουν, τα κύματα διακρίνονται σε:

i. Μηχανικά (ή κύματα ελαστικότητας). Μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και διαδίδονται σε ελαστικά μέσα, δηλαδή διαδίδονται σε σώματα που μπορούν να υποστούν ελαστικές παραμορφώσεις.

ii. Ηλεκτρομαγνητικά. Μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και δεν απαιτούν μέσο διάδοσης, δηλαδή διαδίδονται και στο κενό.

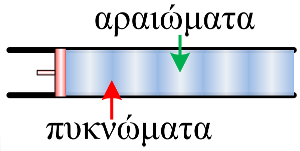
Β. Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο ταλαντώνονται τα στοιχειώδη σωματίδια του μέσου σε σχέση με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, διακρίνουμε τα κύματα σε:

i. Εγκάρσια. Ονομάζονται τα κύματα εκείνα στα οποία **η διεύθυνση της ταλάντωσης** των υλικών σημείων του μέσου **είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος**. Διαδίδονται **μόνο στα στερεά** σώματα και κατά τη διάδοση



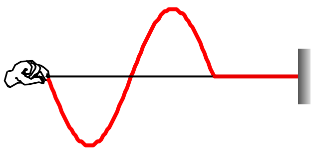
τους δημιουργούνται στο ελαστικό μέσο "**όρη**" και "**κοιλάδες**", δηλαδή περιοδικές μεταβολές του σχήματος του. Εγκάρσια μπορούμε να θεωρήσουμε **κατά προσέγγιση** και τα κύματα που διαδίδονται στην **επιφάνεια υγρών**.

ii. Διαμήκη. Ονομάζονται τα κύματα εκείνα στα οποία **η διεύθυνση της ταλάντωσης** των υλικών σημείων του μέσου **είναι παράλληλη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος**. **Διαδίδονται σε όλα τα ελαστικά σώματα** (στερεά, υγρά ή αέρια). Κατά τη διάδοση τους δημιουργούν στο ελαστικό μέσο "**πυκνώματα**" και "**αραιώματα**", δηλαδή περιοδικές μεταβολές της πυκνότητας του.

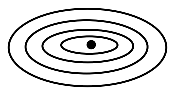


Γ. Ανάλογα με τις διαστάσεις του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδονται, τα κύματα διακρίνονται σε:

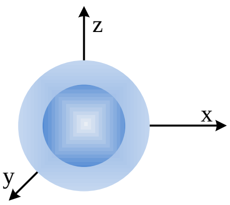
i. Γραμμικά. Λέγονται τα κύματα τα οποία διαδίδονται κατά μήκος ενός γραμμικού μέσου, δηλαδή σε **μία διάσταση**.



ii. Επιφανειακά. Λέγονται τα κύματα τα οποία διαδίδονται σε δύο διαστάσεις, για παράδειγμα στην **επιφάνεια ενός υγρού.**



iii. Κύματα χώρου. Λέγονται τα κύματα τα οποία διαδίδονται σε όλα τα σημεία του χώρου, δηλαδή και **στις τρεις διαστάσεις**, για παράδειγμα τα ηχητικά κύματα.



Πως υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος:

Η **ταχύτητα διάδοσης** του κύματος ($\vec{\upsilon}$) σ' ένα ελαστικό μέσο είναι σταθερή. Αν σε χρόνο Δt το κύμα διαδίδεται σε απόσταση $\Delta\vec{x}$ από την πηγή, η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$\vec{\upsilon} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ **και το μέτρο είναι** $\boldsymbol{\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$

Η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται καθώς και από το είδος του κύματος. Είναι **ανεξάρτητη από** το **πλάτος** και τη **συχνότητα** της αρχικής διαταραχής.

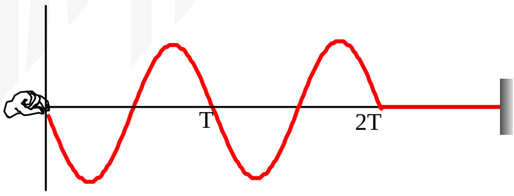
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

☞ **Πότε ένα κύμα ονομάζεται αρμονικό και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του;**

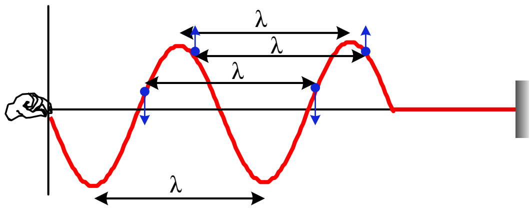
Αρμονικό κύμα ονομάζεται ένα κύμα όταν η αρχική διαταραχή που το παράγει είναι μια **αρμονική ταλάντωση**. **Οποιαδήποτε κυματική διαταραχή, όσο περίπλοκη και αν είναι, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το άθροισμα ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων (ανάλυση Fourier).** Τα χαρακτηριστικά του αρμονικού κύματος είναι η **περίοδος Τ**, **η συχνότητα f και το μήκος κύματος λ**.

Η **περίοδος** (Τ) του αρμονικού κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση και ισούται με την περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης της πηγής. Σε μία **περίοδο του κύματος η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται,** όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



Η συχνότητα (f) με την οποία ταλαντώνονται όλα τα σημεία του μέσου ονομάζεται συχνότητα του κύματος. Η συχνότητα του κύματος -όπως και η περίοδος- **καθορίζεται από την πηγή του κύματος και είναι ανεξάρτητη από το μέσο διάδοσης**. Η συχνότητα και η περίοδος είναι μεγέθη αντιστρόφως ανάλογα αφού $f \cdot T = 1$

Μήκος κύματος (λ) ονομάζεται **η απόσταση** στην οποία διαδίδεται το κύμα **σε χρόνο μίας περιόδου**. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε το μήκος κύματος και ως την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του μέσου τα οποία την ίδια χρονική στιγμή έχουν την ίδια απομάκρυνση και κινούνται κατά την ίδια φορά.



☞ **Ποια είναι η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής;**

Η ταχύτητα διάδοσης υ ενός κύματος, το μήκος κύματος λ και η συχνότητα του f συνδέονται με τη σχέση:

$\upsilon = \lambda f$ η οποία ονομάζεται **θεμελιώδης κυματική εξίσωση**.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

☞ Απόδειξη της σχέσης υ = λf

Επειδή το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα, ισχύει $\Delta x = \upsilon \cdot \Delta t$. Αν θέσουμε όπου $\Delta t = T$, τότε η απόσταση Δx είναι εξ ορισμού ίση με το μήκος κύματος λ. Επομένως $\lambda = \upsilon T$.

Αν αντικαταστήσουμε όπου $T = \frac{1}{f}$,η παραπάνω, σχέση γίνεται $\lambda = \upsilon \frac{1}{f}$, και τελικά $\upsilon = \lambda f$.

☞ Η εξίσωση του αρμονικού κύματος

Αρμονικό κύμα πλάτους Α διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox.

Εξίσωση του αρμονικού κύματος ονομάζεται **η εξίσωση** με την οποία **υπολογίζουμε την απομάκρυνση (y)** ενός υλικού σημείου του μέσου διάδοσης **από τη θέση ισορροπίας του**. Η εξίσωση αυτή είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου (ή και της θέσης (x) του σημείου πάνω στον άξονα x′Ox. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) το σημείο O του άξονα το οποίο τη χρονική στιγμή t = 0 ξεκινά από τη θέση ισορροπίας του να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας θετική μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή κινείται προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

Η εξίσωση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ αποτελεί την εξίσωση του αρμονικού κύματος πλάτους Α που **διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση** του άξονα x′Ox, ενώ

η εξίσωση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ αποτελεί την εξίσωση του αρμονικού κύματος πλάτους Α που **διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση** του άξονα x′Ox.

☞ Τι ονομάζεται φάση ενός αρμονικού κύματος;

Φάση ενός αρμονικού κύματος ονομάζεται η γωνία:

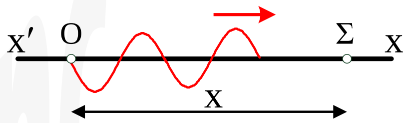
$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ για κύμα που διαδίδεται προς τη **θετική κατεύθυνση** του άξονα, ή

$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ για κύμα που διαδίδεται προς την **αρνητική κατεύθυνση** του άξονα.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Απόδειξη της εξίσωσης του αρμονικού κύματος

Α' τρόπος



Θεωρούμε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox και στο οποίο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα πλάτους Α, προς τη θετική φορά του άξονα, χωρίς απώλειες ενέργειας. Επίσης θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) την αρχή Ο του άξονα και ως χρονική στιγμή t = 0 τη στιγμή κατά την οποία η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή Ο είναι μηδέν. Επομένως η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι της μορφής y = Αημωt.

Ένα τυχαίο σημείο Σ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα θ' αρχίσει να ταλαντώνεται ύστερα από χρόνο $\Delta t = \frac{x}{\upsilon}$ μετά τη χρονική στιγμή t = 0 που ξεκίνησε να ταλαντώνεται το σημείο Ο. Κατά συνέπεια η φάση της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι **μικρότερη** από τη φάση της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά γωνία Δφ, η οποία ισούται με: $\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{x}{\lambda}$.

Επειδή ισχύει $\lambda = \upsilon T$, προκύπτει $\Delta\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$. Συνεπώς η απομάκρυνση του σημείου Σ που βρίσκεται στη θέση x υπολογίζεται μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή από την εξίσωση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Β′ τρόπος

Θεωρούμε, όπως και προηγουμένως, ότι η απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο υπολογίζεται από τη σχέση y =Αημωt και ότι το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα. Ένα τυχαίο σημείο Σ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x του θετικού ημιάξονα θ' αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{x}{\upsilon}$

Επομένως μια τυχαία χρονική στιγμή t το σημείο Σ θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t - t_1 = t - \frac{x}{\upsilon}$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης του θα είναι:

$$y = A\eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T\cdot\upsilon}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

☞ **Απόδειξη της εξίσωσης του αρμονικού κύματος όταν αυτό διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x′Ox.**

Αν το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα x′Ox, δηλαδή από το σημείο Σ προς το σημείο Ο, τότε αρχίζει να ταλαντώνεται πρώτα το σημείο Σ και μετά το σημείο Ο. Στην περίπτωση αυτή, η φάση της ταλάντωσης του σημείου Σ είναι **μεγαλύτερη** της φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο κατά $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi\Delta x}{\lambda}$.

Θεωρώντας και πάλι ότι η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ο είναι της μορφής y = Αημωt, η απομάκρυνση του σημείου Σ μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα υπολογίζεται από τη σχέση

y = Αημ(ωt + Δφ). Επομένως η εξίσωση του αρμονικού κύματος που **διαδίδεται προς τ' αριστερά** είναι της μορφής: $\mathbf{y = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}\right)}$

Παρατήρηση: Στις παραπάνω εξισώσεις του αρμονικού κύματος το x είναι η τετμημένη της θέσης του σημείου που εξετάζουμε. Αν το κύμα διαδίδεται και στον αρνητικό ημιάξονα, τότε αντικαθιστούμε στις εξισώσεις αυτές αρνητικές τιμές για το x εφόσον τα σημεία που εξετάζουμε βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα.

☞ **Οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ταλάντωσης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα;**

Κατά τη διάδοση του αρμονικού κύματος **τα υλικά σημεία** του ελαστικού μέσου ξεκινούν να **ταλαντώνονται** όταν το κύμα φτάσει σε αυτά. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Μ του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση x_M του άξονα δίνεται από τη σχέση $y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}\pm\dfrac{x_M}{\lambda}\right)$

Συνεπώς η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ έχει χρονική εξίσωση της μορφής:

$\boldsymbol{\upsilon_M = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}\pm\dfrac{x_M}{\lambda}\right)}$ με $\boldsymbol{\upsilon_{max} = \omega A}$ κοινή για όλα τα σημεία που ταλαντώνονται.

Αντίστοιχα, η επιτάχυνση της ταλάντωσης του σημείου Μ έχει χρονική εξίσωση της μορφής:

$\boldsymbol{\alpha_M = -\alpha_{max}\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T}\pm\dfrac{x_M}{\lambda}\right)}$ με $\boldsymbol{\alpha_{max} = \omega^2 A}$ κοινή για όλα τα σημεία που ταλαντώνονται.

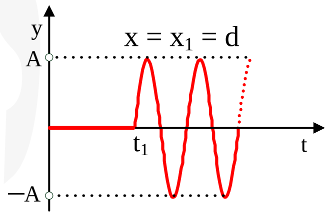
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Παρατήρηση: Πρέπει να διακρίνουμε την ταχύτητα ταλάντωσης κάθε υλικού σημείου του μέσου διάδοσης από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, δηλαδή την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή. **Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος σε ορισμένο ελαστικό μέσο είναι σταθερή** και **εξαρτάται** από το **είδος** του **κύματος** και τις **ιδιότητες του μέσου**, ενώ **η ταχύτητα ταλάντωσης**, όπως είναι γνωστό, **μεταβάλλεται με το χρόνο** και μάλιστα αποκτά τη **μέγιστη τιμή** της, κατ' απόλυτη τιμή, όταν το υλικό σημείο **διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του**.

Γραφικές παραστάσεις της εξίσωσης ενός αρμονικού κύματος;

α. Γραφική παράσταση της y = f(t)

Έστω ένα αρμονικό κύμα το οποίο διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα x′Ox και η εξίσωση του είναι της μορφής $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Για ένα υλικό σημείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x_1 = d$ η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης του γράφεται:



$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{\lambda}\right) \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\sigma\tau\alpha\theta.\right)$ επειδή το πηλίκο $\frac{d}{\lambda}$ είναι σταθερό. Με την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας **ενός συγκεκριμένου σημείου** του μέσου διάδοσης κάθε χρονική στιγμή. Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής είναι η γνωστή ημιτονοειδής καμπύλη μετατοπισμένη προς τα δεξιά στη διεύθυνση του άξονα Ox. Η αρχή της καμπύλης αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\upsilon}{d}$ κατά την οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το συγκεκριμένο σημείο.

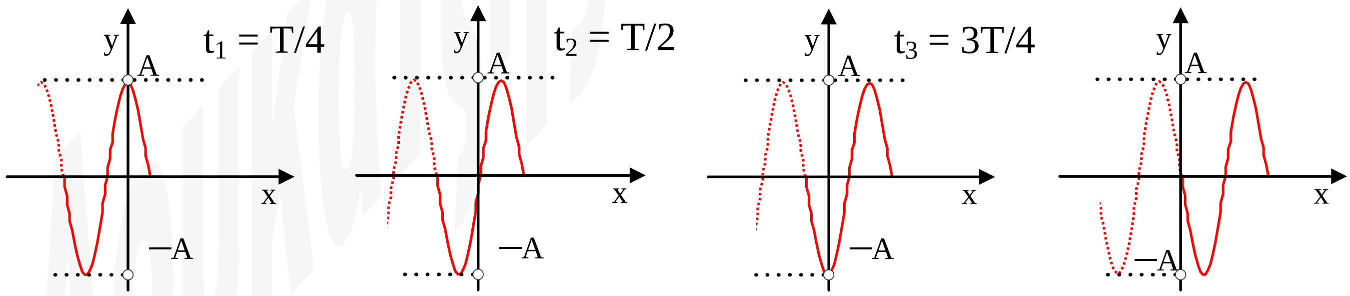
β. Γραφική παράσταση της y = f(x) (Στιγμιότυπο του κύματος)

Έστω ένα κύμα που διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα και έχει εξίσωση $y = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$.

Για μια δεδομένη χρονική στιγμή t_1 η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται: $y = Aημ2π\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{λ}\right)$

Με την παραπάνω σχέση **υπολογίζουμε την απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας** των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται **την ίδια χρονική στιγμή t_1.** Επειδή το πηλίκο $\frac{t_1}{T}$ είναι σταθερό, προκύπτει: $y = Aημ2π\left(σταθ. - \frac{x}{λ}\right)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(x) μας δίνει την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου από τη Θ.Ι. τους μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και λέγεται **στιγμιότυπο (φωτογραφία) του κύματος.** Στο σχήμα φαίνονται τέσσερα στιγμιότυπα ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα.



☞ Είναι δυνατόν η φάση ενός αρμονικού κύματος μια χρονική στιγμή t για ορισμένη θέση x_1 να είναι αρνητική;

Θεωρούμε αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα x′Ox και η φάση του δίνεται από τη σχέση $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Έστω ότι για μια χρονική στιγμή t η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = x_1$ είναι $\varphi < 0$. Έχουμε: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) < 0 \Rightarrow \frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda} < 0 \Rightarrow x_1 > \frac{\lambda t}{T} \Rightarrow x_1 > \upsilon t$

Όμως ο όρος $\upsilon t = \Delta x$ ισούται με το μήκος που έχει διανύσει το κύμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή t. Επειδή $x_1 > \Delta x$, το κύμα δεν έχει φτάσει στη θέση x_1 τη χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι **δεν μπορεί η φάση του κύματος να είναι αρνητική.**

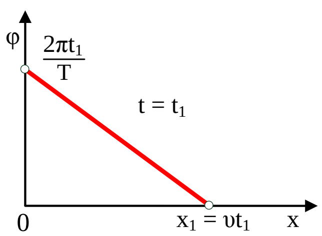
☞ Γραφικές παραστάσεις της φάσης του αρμονικού κύματος

α. Γραφική παράσταση της φ = f(x)

Έστω ένα αρμονικό κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα x′Ox προς τη θετική φορά του άξονα.

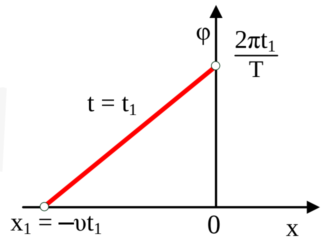
Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$.Θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των σημείων του ελαστικού μέσου μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_1. Για τα σημεία του μέσου διάδοσης που ταλαντώνονται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_1 ισχύει $\varphi \geq 0$. Κατά συνέπεια πρέπει: $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{t_1}{T}-\frac{x}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \frac{t_1}{T} \geq \frac{x}{\lambda}$ και επειδή ισχύει $\lambda = \upsilon T$, καταλήγουμε: $x \leq \upsilon t_1$

Δηλαδή τα σημεία του μέσου που ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t_1 είναι τα σημεία εκείνα για τα οποία ισχύει $x \leq \upsilon t_1$. Έχουμε: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi = 2\pi\frac{t_1}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}$ με $0 \leq x \leq \upsilon t_1$



Η γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με τη θέση x είναι ευθεία γραμμή και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Παρατήρηση: Αν το αρμονικό κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα, τότε η εξίσωση της φάσης του είναι η $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$ Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\varphi = 2\pi\frac{t_1}{T}+2\pi\frac{x}{\lambda}$, οπότε η γραφική παράσταση έχει τη μορφή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Γραφική παράσταση της φ = f(t)

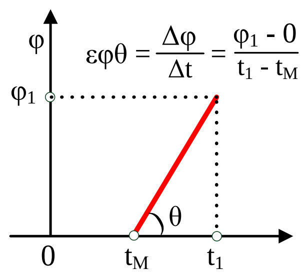
Έστω ένα αρμονικό κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα x′Ox προς τη θετική κατεύθυνση. Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα συγκεκριμένο σημείο Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση x_1 του άξονα. Για το σημείο αυτό έχουμε: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right) \Rightarrow \varphi = 2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x_1}{\lambda}$

Όμως η εξίσωση αυτή έχει νόημα μόνο για τις χρονικές στιγμές τις οποίες ισχύει $\varphi \geq 0$.

Έτσι έχουμε: $2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{x_1}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{T\cdot x_1}{\lambda} \Rightarrow t \geq \frac{x_1}{\upsilon} \Rightarrow t \geq t_M$

όπου t_M η χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο Μ.

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



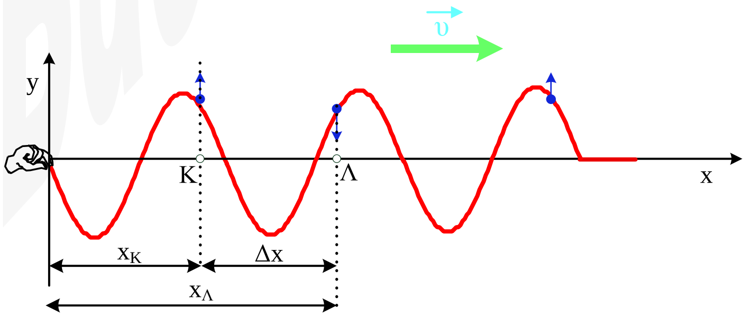
Παρατήρηση: Για κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα η γραφική παράσταση φ = f(t) είναι η ίδια με αυτή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

☞ **Διαφορά φάσης την ίδια χρονική στιγμή μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα.**

Θεωρούμε ότι ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα Ox, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δύο σημεία Κ και Λ του μέσου διάδοσης έχουν τετμημένες x_K και x_Λ αντίστοιχα. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ την ίδια χρονική στιγμή είναι διαφορετικές και υπολογίζονται αντίστοιχα

από τις εξισώσεις: $\varphi_K = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_K}{\lambda}$ και $\varphi_\Lambda = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda}$

Επειδή $x_K < x_\Lambda$, θα είναι $\varphi_K > \varphi_\Lambda$. Δηλαδή, για ένα κύμα που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, μεγαλύτερη φάση ταλάντωσης έχουν τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται πιο κοντά στο σημείο Ο. Γενικά, μπορούμε να γράψουμε ότι **οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται πιο κοντά στην πηγή του κύματος έχουν κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη φάση από τις αντίστοιχες ταλαντώσεις των σημείων που βρίσκονται πιο μακριά.** Η πρόταση αυτή ισχύει και για κύμα που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση αλλά και για κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση. Η διαφορά φάσης της ταλάντωσης των σημείων Κ και Λ την ίδια χρονική στιγμή είναι:



$$\Delta\varphi = \varphi_K - \varphi_\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda}(x_\Lambda - x_K) \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$$

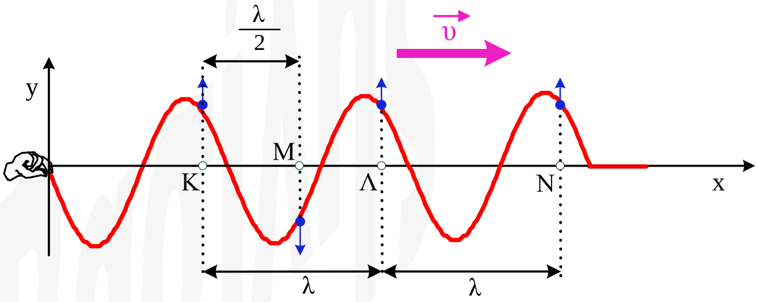
όπου Δx η απόσταση **μεταξύ των θέσεων ισορροπίας** των δύο σημείων.

Παρατήρηση: Στον ίδιο τύπο καταλήγουμε κι αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t$, όπου Δt η χρονική διάρκεια που απαιτείται ώστε το κύμα να διαδοθεί από το ένα σημείο στο άλλο. Είναι $\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon}$, οπότε προκύπτει $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\Delta x}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$.

☞ Συμφωνία φάσης και αντίθεση φάσης

α. Οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ τους απόσταση **$\Delta x = k\lambda$** (όπου k = 1,2,...), δηλαδή απέχουν ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, έχουν διαφορά φάσης **$\Delta\varphi = 2k\pi$ rad**. Αυτά τα σημεία λέμε ότι βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης** και έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης.

β. Οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ λ τους απόσταση $\mathbf{\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}}$ (όπου k = 0,1,2,...), δηλαδή απέχουν περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, έχουν διαφορά φάσης $\mathbf{\Delta\varphi = (2k + 1)\pi}$ rad. Αυτά τα σημεία λέμε ότι βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης** κι έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες ταλάντωσης.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός κύματος κάποια χρονική στιγμή. Η ταλάντωση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση Κ είναι σε συμφωνία φάσης με τις ταλαντώσεις των σημείων που βρίσκονται στις θέσεις Λ και Ν του άξονα Οx. Τα σημεία Κ, Λ, Ν, βρίσκονται σε αντίθεση φάσης με την ταλάντωση του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση Μ του ίδιου άξονα.

☞ Μεταβολή φάσης της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2

Η φάση της ταλάντωσης ενός υλικού σημείου του μέσου διάδοσης εξαρτάται από το χρόνο. Κατά συνέπεια, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 (με $t_1 < t_2$) η φάση είναι διαφορετική και είναι:

$\varphi_1 = 2\pi\frac{t_1}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}$ και $\varphi_2 = 2\pi\frac{t_2}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}$

Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_2 - t_1$ υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta T}$ ή $\boldsymbol{\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t}$

Η αρχική φάση σε ένα αρμονικό κύμα

Αν η ταλάντωση του σημείου Ο, που το θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων, έχει αρχική φάση φ_0, τότε η εξίσωση του αρμονικού κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad \text{ή} \quad y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)\right]$$

Αρχική φάση φ_0 για το κύμα μπορεί να σημαίνει ότι:

α. είτε το σημείο Ο που το θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων έχει αρχίσει να εκτελεί ταλάντωση πριν τη χρονική στιγμή που εμείς θεωρούμε ως t = 0, οπότε αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t = 0 το κύμα να έχει ήδη διαδοθεί σε κάποια απόσταση πέρα από το σημείο Ο,

β. είτε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Ο,

γ. είτε το σημείο Ο ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με φορά προς τα κάτω και με ταχύτητα $\upsilon = -\upsilon_{max}$. Στην περίπτωση αυτή το κύμα δεν έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο τη χρονική στιγμή t = 0, αλλά όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου στα οποία φτάνει το κύμα ξεκινούν να ταλαντώνονται με φορά προς τα κάτω (όπως δηλαδή και το σημείο Ο).

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι ένα κύμα **δεν έχει αρχική φάση** όταν τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα Ο(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται με ταχύτητα $\upsilon = +\upsilon_{max}$.