

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

**1.** Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό στη διεύθυνση του άξονα  $Ox$ , έχει χρονική εξίσωση  $E = 0,02\eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{\lambda})$  (S.I.).

**α.** Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος,

**β.** Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το χρόνο,

**γ.** Για τη λήψη αυτού του ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμοποιείται δέκτης με ιδανικό κύκλωμα LC, το πηνίο του οποίου έχει συντελεστή αυτεπαγωγής  $L = 10 \mu\text{H}$ . Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του πυκνωτή του κυκλώματος LC.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  και για τις πράξεις:  $\pi^2 = 10$ .

### Λύση

**α.** Συγκρίνοντας την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται στην εκφώνηση με τη γενική μορφή της χρονικής εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$E = E_{\max} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ προκύπτει: } T = 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow \mathbf{f = 10^8 \text{ Hz}} \text{ και } \mathbf{E_{\max} = 0,02 \text{ V/m}}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:  $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 3 \text{ m}}$

**β.** Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι η:  $B = B_{\max} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

Ισχύει  $c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} \Rightarrow B_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-10} \text{ T}$ . Επομένως:  $\mathbf{B = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{3} \eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{3})}$  (S.I.)

**γ.** Για να γίνει η λήψη του ηλεκτρομαγνητικού κύματος από το δέκτη, πρέπει η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος να ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του κυκλώματος LC. Δηλαδή πρέπει να έχουμε συντονισμό του κυκλώματος LC. Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι  $f_{H/M} = 10^8$  Hz. Επομένως:

$$f_{H/M} = f_0 \Rightarrow f_{H/M} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{f_{H/M}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot L} \Rightarrow \mathbf{C = 2,5 \cdot 10^{-13} \text{ F}}$$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο δια-

δίδεται στο κενό και προς τη θετική φορά του άξονα  $x'Ox$ , είναι η  $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{6} \right)$  (S.I.).

α. Να υπολογίσετε την περίοδο  $T$  του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα λαμβάνεται από ραδιοφωνικό δέκτη που περιλαμβάνει ιδανικό κύκλωμα LC.

γ. Εάν ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι  $L = 1 \mu\text{H}$ , για ποια τιμή της χωρητικότητας  $C$  του πυκνωτή συντονίζεται ο δέκτης στο συγκεκριμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα;

Όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα εισέρχεται από το κενό σε διαφανές υλικό, καταγράφουμε ελάττωση κατά 10% στην ταχύτητα διάδοσης του, ενώ δεν παρατηρούμε καμία μεταβολή στη συχνότητα του.

δ. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος στο διαφανές υλικό.

Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Δίνεται για τις πράξεις:  $\pi^2 = 10$ .

### Λύση

α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση  $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{6} \right)$  με την αντίστοιχη εξίσωση της θεωρίας

$$B = B_{\max} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ προκύπτει: } \mathbf{B_{\max} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ T}} \text{ και } \mathbf{\lambda = 6 \text{ m}}.$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής θεωρίας  $c = \frac{\lambda}{T}$  προκύπτει:

$$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow T = \frac{6}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \mathbf{T = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}}$$

β. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow E_{\max} = c \cdot B_{\max} \Rightarrow \mathbf{E_{\max} = 13,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος είναι:

$$E = E_{\max} \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$E = 13,5\eta\mu 2\pi \left( 10^8 \frac{t}{2} - \frac{x}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

**γ.** Για να συντονιστεί ο δέκτης στο συγκεκριμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, πρέπει η ιδιοπερίοδος  $T_0$  του κυκλώματος LC που περιλαμβάνει να γίνει ίση με την περίοδο  $T$  του κύματος. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$T = T_0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{LC} = T_0 \Rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} \Rightarrow C = \frac{4 \cdot 10^{-16}}{4\pi^2 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow C = 10^{-11} \text{ F}$$

**δ.** Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ταχύτητα διάδοσης  $v$  του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό είναι:  $v = c - 0,1c = 0,9c \Rightarrow v = 2,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Εφόσον δεν μεταβάλλεται η συχνότητα του κύματος κατά την είσοδο του στο διαφανές υλικό, η θεμελιώδης

εξίσωση της κυματικής γράφεται:  $v = \frac{\lambda'}{T} \Rightarrow \lambda' = v \cdot T \Rightarrow \lambda' = 2,7 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^8 \Rightarrow \lambda' = 5,4 \text{ m}$

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**3.** Δύο σύγχρονες πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  βρίσκονται επάνω στον άξονα  $x'Ox$  στις θέσεις  $K(x_K = -1,7 \text{ m})$  και  $\Lambda(x_\Lambda = +1,7 \text{ m})$ , αντίστοιχα. Οι δύο πηγές παράγουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητα  $f = 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ . Ανιχνευτής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βρίσκεται επάνω στο οριζόντιο επίπεδο  $xOy$  στη θέση  $Z$ , με  $(KZ) = r_1 < (\Lambda Z) = r_2$  και ανιχνεύει μέγιστο έντασης λόγω της συμβολής των κυμάτων στη θέση αυτή. Στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Lambda Z$  και μεταξύ των θέσεων  $\Lambda$  και  $Z$  υπάρχουν έξι θέσεις στις οποίες ο ανιχνευτής δεν καταγράφει σήμα.

**α.** Να υπολογίσετε το μήκος κύματος  $\lambda$  των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

**β.** Να υπολογίσετε το πλήθος των θέσεων που βρίσκονται ανάμεσα στις δύο πηγές και επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $K\Lambda$  στις οποίες ο ανιχνευτής δεν θα κατέγραψε σήμα.

**γ.** Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου  $\Theta$  του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$  το οποίο βρίσκεται επάνω στην ίδια υπερβολή με το σημείο  $Z$ .

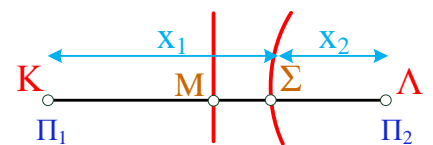
Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι:  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

### Λύση

**α.** Το μήκος κύματος  $\lambda$  των δύο κυμάτων υπολογίζεται με τη βοήθεια της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής θεωρίας. Έχουμε:  $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$

**β.** Η απόσταση μεταξύ των δύο πηγών είναι:  $d = |x_K| + |x_\Lambda| \Rightarrow d = 3,4 \text{ m}$

Θεωρούμε σημείο  $\Sigma$  του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$ , ανάμεσα στις δύο πηγές, στο οποίο ο ανιχνευτής δεν καταγράφει σήμα, δηλαδή τα κύματα συμβάλλουν στο σημείο αυτό ακυρωτικά. Έστω  $x_1$  και  $x_2$  οι αποστάσεις του σημείου  $\Sigma$  από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα, όπως δείχνει το ακόλουθο σχήμα.



Για το σημείο  $\Sigma$  ισχύει:

$$x_1 - x_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{και}$$

$$x_1 + x_2 = d \quad (2)$$

προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω και προκύπτει:

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$2x_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} + d \Rightarrow x_1 = \frac{N\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = 0,5N + 0,25 + 1,7 \Rightarrow x_1 = 0,5N + 1,95 \text{ (m)}$$

Επίσης, πρέπει να ισχύει:  $0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq 0,5N + 1,95 \leq 3,4 \Rightarrow -1,95 \leq 0,5N \leq 1,45 \Rightarrow -3,9 \leq N \leq 2,9$

Άρα  **$N = -3, -2, -1, 0, 1, 2$**

Επομένως, υπάρχουν 6 θέσεις επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, όπου ο ανιχνευτής δεν καταγράφει σήμα.

**γ.** Εφόσον μεταξύ των θέσεων Λ και Ζ

υπάρχουν έξι θέσεις ακυρωτικής συμβολής (θέσεις όπου ο ανιχνευτής δεν καταγράφει σήμα), η θέση Ζ βρίσκεται στην υπερβολή ενισχυτικής συμβολής με  $N =$

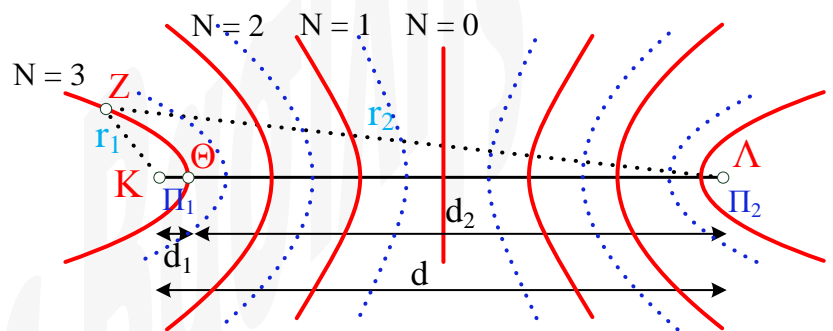
3, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σημείο Θ ανήκει στην ίδια υπερβολή που ανήκει και το σημείο Ζ. Έτσι, εάν  $d_1$  και  $d_2$  είναι οι αποστάσεις της θέσης Θ από τις πηγές  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  αντίστοιχα, ισχύει η σχέση:  $d_2 - d_1 = 3\lambda$  (3)

Επίσης, για τις αποστάσεις  $d_1$  και  $d_2$  ισχύει:  $d_2 + d_1 = d$  (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4), προκύπτει:  $2d_2 = d + 3\lambda \Rightarrow d_2 = \frac{d + 3\lambda}{2} \Rightarrow d_2 = 3,2 \text{ m}$

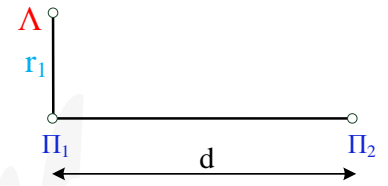
και  $d_1 = d - d_2 \Rightarrow d_1 = 0,2 \text{ m}$ .

Από τις αποστάσεις αυτές από τις πηγές μπορούμε αν θέλουμε να προσδιορίσουμε και τις θέσεις του Θ πάνω στον άξονα  $x'x$ , οι οποίες είναι:  $x_{1\Theta} = -1,7 + 0,2 \Rightarrow \mathbf{x_{1\Theta} = -1,5 \text{ m}}$  και  $x_{2\Theta} = -1,7 + 3,2 \Rightarrow \mathbf{x_{2\Theta} = 1,5 \text{ m}}$ .



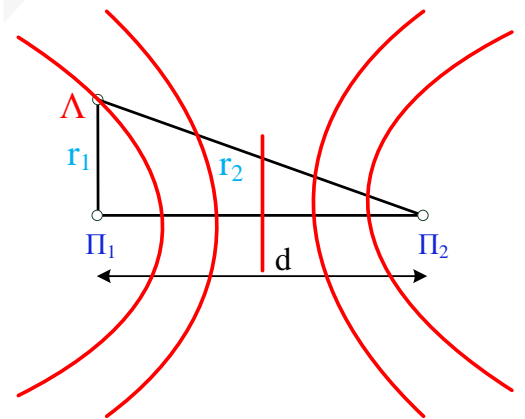
## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Δύο σύγχρονες πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  βρίσκονται στη διεύθυνση του άξονα  $x'Ox$ , και απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d = 8$  m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένας ανιχνευτής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βρίσκεται σε ημιευθεία κάθετη στην  $\Pi_1\Pi_2$  που περνάει από την  $\Pi_1$  και σε απόσταση 6 m απ' αυτή. Η θέση αυτή είναι η πλησιέστερη στην  $\Pi_1$ , όπου ο ανιχνευτής μπορεί να εντοπίσει μέγιστο έντασης λόγω της συμβολής των κυμάτων. Μεταξύ των πηγών και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Pi_1\Pi_2$  υπάρχουν πέντε σημεία ενισχυτικής συμβολής. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος των κυμάτων.



### Λύση

Η συμβολή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει την ίδια φυσική ερμηνεία με τη συμβολή των μηχανικών κυμάτων. Η διαφορά των δρόμων που ακολουθεί το κύμα για να φτάσει από τις δύο σύγχρονες πηγές σ' ένα σημείο είναι η αιτία της εμφάνισης ακυρωτικής ή ενισχυτικής συμβολής σ' αυτό το σημείο. Το σημείο  $\Lambda$  είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και συνεπώς οι αποστάσεις του  $r_1$  και  $r_2$  από τις δύο πηγές ικανοποιούν τη σχέση:  $r_1 - r_2 = N\lambda$  με  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Αφού έχουμε πάνω στην  $\Pi_1\Pi_2$  πέντε σημεία ενισχυτικής συμβολής θα έχουμε δύο υπερβολές δεξιά της μεσοκαθέτου την μεσοκάθετο και δύο αριστερά της μεσοκαθέτου όπως στο σχήμα. Επειδή  $r_1 < r_2$ , θα έχουμε:

$$N = 2. \text{ Άρα: } r_2 - r_1 = 2\lambda$$

$$\text{Είναι } r_1 = 6 \text{ m και } r_2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m}$$

$$\text{Επομένως: } 2\lambda = r_2 - r_1 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m.}$$