ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Κατά μήκος μιας χορδής μεγάλου μήκους, η οποία ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox, διαδίδονται ταυτόχρονα δύο αρμονικά κύματα που έχουν εξισώσεις $y_1 = 0{,}1ημ2π(5t – 2{,}5x)$ (S.I.) και $y_2 = 0{,}1ημ2π(5t + 2{,}5x)$ (S.I.). Τα δύο κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στο ελαστικό μέσο στάσιμο κύμα.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή,

β. Να αποδείξετε ότι στην αρχή O(x = 0) του άξονα δημιουργείται κοιλία.

γ. Να διερευνήσετε αν στο σημείο Z(x_Z = 0,5 m) σχηματίζεται δεσμός ή κοιλία,

δ. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου M της χορδής που έχει τετμημένη $x_M = \frac{1}{6}$ m.

Λύση

α. Από τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων προκύπτει:

$$T = \frac{1}{5}s \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\ s} \quad \text{και} \quad λ = \frac{1}{2{,}5}m \Rightarrow \mathbf{λ = 0{,}4\ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής: $y = 2Aσυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}$

όπου A το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Επομένως:

$$y = 2 \cdot 0{,}1συν\frac{2πx}{0{,}4}ημ\frac{2πt}{0{,}2} \Rightarrow \mathbf{y = 0{,}2συν(5πx)ημ(10πt)\ \ (S.I.)}$$

β. Όλα τα σημεία που είναι κοιλίες ταλαντώνονται με πλάτος A' = 2A = 0,2 m. Είναι:

A' = |0,2συν(5πx) | και για x = 0 προκύπτει **A' = 0,2 m**. Επομένως στο σημείο O(x = 0) δημιουργείται κοιλία.

γ. Βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου που έχει τετμημένη x_Z = 0,5 m. Έχουμε:

$A_Z = |0{,}2συν5π \cdot 0{,}5| \Rightarrow \mathbf{A_Z = 0}$

Συνεπώς στο σημείο Z σχηματίζεται δεσμός.

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου M υπολογίζεται από τον τύπο:

$A_M = |0{,}2\text{συν}5\pi\frac{1}{6}| \Rightarrow$ **$A_M = 0{,}1\sqrt{3}$ m**

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου αυτού υπολογίζεται από τη σχέση: $\upsilon_{max(M)} = \omega A_M$

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\pi$ rad/s. Συνεπώς: **$\upsilon_{max(M)} = \pi\sqrt{3}$ m/s**.

2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους. Τα κύματα διαδίδονται προς αντίθετη κατεύθυνση και συμβάλλοντας δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο έχει εξίσωση $y = 0{,}2συν(4πx)\cdot ημ(10πt)$ (S.I.). Το καθένα από τα τρέχοντα κύματα εξαναγκάζει το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα να εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $y = Αημωt$.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο αρμονικών κυμάτων που σχηματίζουν το στάσιμο κύμα.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση από την αρχή O ενός σημείου K του άξονα που είναι δεσμός, αν μεταξύ των σημείων O και K υπάρχουν 6 κοιλίες.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ταλάντωσης του υλικού σημείου $Z(x_Z = \frac{5}{12}$ m) σε συνάρτηση με το χρόνο.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $π^2 = 10$.

Λύση

α. Η γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος είναι η: $y = 2Ασυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}$

όπου Α το πλάτος, Τ η περίοδος και λ το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Συγκρίνοντας την εξίσωση $y = 0{,}2συν(4πx)\,ημ(10πt)$ (S.I.), η οποία δίνεται στην εκφώνηση, με τη γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος προκύπτει:

$Α = 0{,}1$ m, **$λ = 0{,}5$ m** και **$T = 0{,}2$ s**.

Το κάθε τρέχον κύμα εξαναγκάζει το υλικό σημείο O να εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση της μορφής $y = Αημωt$. Επομένως η γενική μορφή της εξίσωσης των δύο αρμονικών κυμάτων είναι:

$$y_1 = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \quad και \quad y_2 = Αημ2π\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{λ}\right)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών προκύπτει:

$y_1 = 0{,}1ημ(10πt – 4πx)$ (S.I.) και **$y_2 = 0{,}1ημ(10πt + 4πx)$ (S.I.)**

β. Σύμφωνα με την εκφώνηση, μεταξύ του O και του K υπάρχουν 6 κοιλίες και το σημείο K είναι δεσμός. Γνωρίζουμε ότι το σημείο O είναι κοιλία, επομένως οι κοιλίες και οι δεσμοί στο ευθύγραμμο τμήμα OK είναι όπως φαίνονται στο σχήμα. Είναι γνωστό ότι η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης σε αυτόν κοιλίας ισούται με λ/4 και η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών ή δεσμών ισούται με λ/2. Άρα η απόσταση d = (ΟΚ) ισούται με: $d = 6\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d = \frac{13\lambda}{4} \Rightarrow \mathbf{d = 1{,}625\,m}$

Η διαφορετικά με τον τύπο των δεσμών παρατηρώντας ότι μετά την κοιλία στο x = 0, που επαληθεύεται για k = 0 στον τύπο $x_K = k\frac{\lambda}{2}$ έχουμε τον δεσμό που επαληθεύεται από τον τύπο $x_\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ για k = 0. Έτσι μετά από 6 κοιλίες θα έχουμε τον δεσμό για k = 6, δηλαδή $x_{\delta 7} = (2\cdot 6+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{13\lambda}{4} \Rightarrow \mathbf{x_{\delta 7} = 1{,}625\,m}$

άρα και **d = (ΟΚ) = 1,625 m**

γ. Το υλικό σημείο Ζ έχει εξίσωση ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση: y = 0,2συν(4πx) ημ(10πt) (S.I.)

αν θέσουμε όπου $x = x_Z = \frac{5}{12}$ m

Δηλαδή: $y_Z = 0{,}2\sigma\upsilon\nu(4\pi\frac{5}{12})\ \eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_Z = 0{,}2\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{3})\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow \mathbf{y_Z = 0{,}1\eta\mu(10\pi t)}$ **(S.I.)**

Επομένως η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Ζ έχει τη μορφή:

$\upsilon_Z = \omega A_Z \sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ (t σε s) $\Rightarrow$ $\mathbf{\upsilon_Z = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu(10\pi t)}$ **(S.I.)**

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης του υλικού σημείου Ζ έχει τη μορφή:

$\alpha_Z = -\omega^2 A_Z \eta\mu(10\pi t)$ (t σε s) $\Rightarrow$ $\mathbf{\alpha_Z = -10\eta\mu(10\pi t)}$ **(S.I.)**.

3. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox δημιουργείται στάσιμο κύμα μέγιστου πλάτους 0,4 m και συχνότητας 2,5 Hz. Στην αρχή μέτρησης O των αποστάσεων (x = 0) σχηματίζεται κοιλία, ενώ ο πλησιέστερος στο σημείο O δεσμός του θετικού ημιάξονα απέχει από το σημείο αυτό απόσταση 0,05 m.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Σημείο Λ βρίσκεται στη θέση $x_Λ$ = 0,35 m. Να βρείτε τον αριθμό των δεσμών και τον αριθμό των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων O και M(x_M = 0,6 m):

i. μια χρονική στιγμή που η πλησιέστερη στο σημείο O κοιλία βρίσκεται στη μέγιστη θετική της απομάκρυνση,

ii. τη χρονική στιγμή t_1 = 0,6 s, γνωρίζοντας ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O του άξονα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και μιας κοιλίας ισούται με λ/4. Αφού στο σημείο O σχηματίζεται κοιλία, ο πλησιέστερος δεσμός απέχει από το σημείο O απόσταση d = λ/4. Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι d = 0,05 m. Άρα: $\frac{\lambda}{4} = 0,05\,\text{m} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,2\ \text{m}}$

Επομένως: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 0,5\ \text{m/s}}$

β. Για τις θέσεις των κοιλιών στον άξονα x′Ox ισχύει: $x_κ = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_κ = 0,1N}$ με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

Επειδή θέλουμε το πλήθος των κοιλιών στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ, θέτουμε τον περιορισμό:

$0 \le x_κ \le x_Λ \Rightarrow 0 \le 0,1N \le 0,35\ \text{m} \Rightarrow 0 \le N \le 3,5$

Επομένως: N = 0,1,2,3 Δηλαδή στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ σχηματίζονται 4 κοιλίες (μαζί με το σημείο O).

Για τις θέσεις των δεσμών στον άξονα x′Ox ισχύει: $x_δ = (2N+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x_δ = 0,1N + 0,05}$ με N = 0, +1, ±2,...

Πρέπει: $0 \le x_δ \le x_Λ \Rightarrow 0 \le 0,1N + 0,05 \le 0,35\ \text{m} \Rightarrow -0,5 \le N \le 3$

Επομένως: Ν = 0,1,2,3

Δηλαδή στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ σχηματίζονται 4 δεσμοί.

γ. Για το στιγμιότυπο του κύματος εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε πρώτα τις θέσεις των δεσμών που δημιουργούνται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ.

Για τους δεσμούς έχουμε: $x_\delta = (2N+1)\dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\delta = 0,2N + 0,1$ με $N = 0,1,2,...$

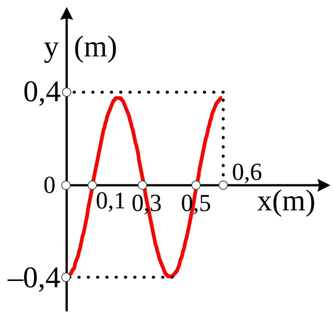
Δηλαδή δεσμοί σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ στις θέσεις του άξονα:

0,1 m, 0,3 m, 0,5 m, (το σημείο Μ είναι κοιλία)

Παρατήρηση: Τις θέσεις των δεσμών πάνω στον άξονα μπορούμε να τις βρίσκουμε εύκολα γνωρίζοντας ότι το Ο είναι κοιλία και ο πλησιέστερος στο σημείο Ο δεσμός απέχει από το Ο απόσταση λ/4. Στη συνέχεα, μετά τον 1^{ο} δεσμό προσθέτοντας λ/2 βρίσκουμε τις θέσεις και των υπολοίπων δεσμών.

Γνωρίζοντας τώρα τις θέσεις του άξονα όπου σχηματίζονται οι δεσμοί είμαστε έτοιμοι να σχεδιάσουμε τα ζητούμενα στιγμιότυπα.

i. Αφού μια κοιλία βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης της, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραία θέση της ταλάντωσης τους. Επίσης, σύμφωνα με την εκφώνηση, πρέπει η πλησιέστερη στο Ο κοιλία (δηλαδή η κοιλία μεταξύ του 1^{ου} και του 2^{ου} δεσμού) να βρίσκεται στη μέγιστη θετική της απομάκρυνση. Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο φροντίζοντας οι διαδοχικές κοιλίες να βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις το στιγμιότυπο είναι όπως στο σχήμα.

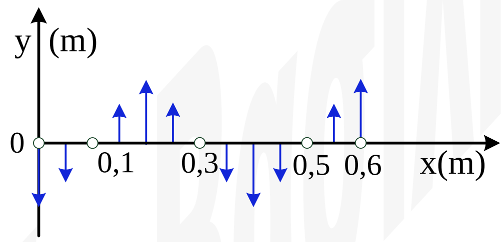


ii. Εφόσον το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο(x = 0) του άξονα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\dfrac{2\pi t}{T} \Rightarrow y = 0,4\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{0,2}\eta\mu\dfrac{2\pi t}{0,4} \Rightarrow \mathbf{y = 0,4\sigma\upsilon\nu 10\pi x \cdot \eta\mu 5\pi t\ (S.I.)}$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6$ s είναι: $y_1 = 0,4\sigma\upsilon\nu 10\pi x \cdot \eta\mu 3\pi = 0$

και η ταχύτητα ταλάντωσης του είναι: $\upsilon_1 = 4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\,\sigma\upsilon\nu(3\pi) \Rightarrow \upsilon_1 = -4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi x)$

Άρα τη χρονική στιγμή t_1 = 0,6 s το υλικό σημείο Ο(x = 0) διέρχεσαι από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα (αφού για x = 0 έχουμε: $υ_1 = –4π· συν(10π·0) = – 4π$ m/s). Αυτό σημαίνει ότι όλα τα υλικά σημεία του μέσου που ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t_1 = 0,6 s διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους (με τις διαδοχικές κοιλίες να κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις). Το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



4. Σε χορδή μεγάλου μήκους που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα (1) με εξίσωση $y_1 = 2ημ2π(4t - \frac{x}{12})$ (x, y_1 σε cm, t σε s). Στην ίδια χορδή διαδίδεται ταυτόχρονα και δεύτερο αρμονικό κύμα (κύμα (2)) ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους με το πρώτο. Το κύμα (2) εξαναγκάζει το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) να εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής y = Αημωt. Εξαιτίας της συμβολής των κυμάτων (1) και (2) σχηματίζεται στη χορδή στάσιμο κύμα.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος (2) καθώς και την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στη χορδή,

β. Να βρείτε τη διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των υλικών σημείων:

i. Κ(x_K = 1 cm) και Λ($x_Λ$ = 6 m) και **ii.** Κ και Μ(x_M = 10 cm).

γ. Να υπολογίσετε κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση μεταξύ του υλικού σημείου Λ και του υλικού σημείου που βρίσκεται στον πλησιέστερο στο σημείο Λ δεσμό.

Λύση

α. Το κύμα (2) έχει αντίθετη κατεύθυνση διάδοσης από το κύμα (1), ίδια συχνότητα και διαδίδεται στο ίδιο ελαστικό μέσο. Άρα θα έχει την ίδια ταχύτητα διάδοσης και το ίδιο μήκος κύματος με το κύμα (1). Η εξίσωση του κύματος (2) είναι η: $y_2 = 2ημ2π(4t + \frac{x}{12})$ (x, y_1 σε cm, t σε s)

Από την εξίσωση του κύματος (1), $y_1 = 2ημ2π(4t - \frac{x}{12})$ (x, y_1 σε cm, t σε s), βρίσκουμε: Α = 2 cm, f = 4 Hz και $λ = 12$ cm.

Από τη γενική μορφή της εξίσωσης του στάσιμου κύματος $y = 2Ασυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}$ προκύπτει:

y = 0,5συν(2πx)·ημ(πt) (S.I.) $y = 4συν\frac{πx}{6}ημ8πt$ (x, y σε cm, t σε s).

β. i. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Κ είναι η:

$$y_K = 4συν\frac{π\cdot 1}{6}ημ8πt \Rightarrow \mathbf{y_K = 2\sqrt{3}ημ8πt} \quad (y_K \text{ σε cm, t σε s}) \ (1)$$

Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Λ είναι η:

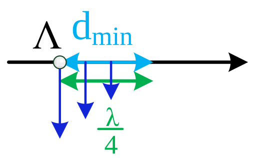
$$y_Λ = 4συν\frac{π\cdot 6}{6}ημ8πt \Rightarrow y_Λ = -4ημ8πt \Rightarrow \mathbf{y_Λ = 4ημ(8πt + π)} \ (y_Λ \text{ σε cm, t σε s}) \ (2)$$

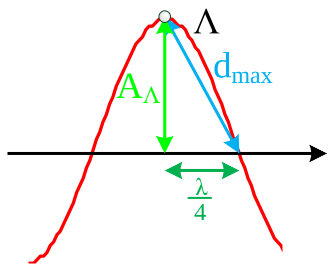
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ ισούται με π rad.

ii. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Μ είναι η:

$$y_M = 4συν\frac{π\cdot 10}{6}ημ8πt \Rightarrow \mathbf{y_M = 2ημ8πt} \quad (y_M \text{ σε cm, t σε s}) \ (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Μ ισούται με μηδέν.





γ. Το υλικό σημείο Λ εκτελεί ταλαντώσεις με πλάτος $A_Λ$ = 4 cm, όπως προκύπτει από την εξίσωση (2). Η μεγαλύτερη απόσταση του υλικού σημείου Λ κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεών του από το υλικό σημείο το οποίο βρίσκεται στο δεσμό Δ επιτυγχάνεται όταν το υλικό σημείο Λ φτάνει στην ακραία αρνητική ή στην ακραία θετική του θέση (σχήμα 1). Αντίστοιχα, η μικρότερη απόσταση επιτυγχάνεται όταν το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του (σχήμα 2). Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$d_{max} = \sqrt{A_Λ^2 + \left(\frac{λ}{4}\right)^2} \Rightarrow d_{max} = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow \mathbf{d_{max} = 5cm}$$

Επίσης: $d_{min} = \frac{λ}{4} \Rightarrow$ **d_{min} = 3 cm.**

5. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους. Τα δύο κύματα συμβάλλοντας δημιουργούν στάσιμο κύμα που έχει εξίσωση $y = 0{,}4συν(2{,}5πx)\cdot ημ(10πt)$ (S.I.). Να υπολογίσετε:

α. τον αριθμό των κοιλιών και τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ($x_K = -2{,}4$ m) και Λ($x_Λ = +1{,}3$ m),

β. την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ τις χρονικές στιγμές που το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα,

γ. κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε τη συχνότητα των τρεχόντων κυμάτων που συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα, ώστε τα σημεία Κ και Λ να είναι δεσμοί και στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ να εμφανίζονται 8 κοιλίες.

Λύση

α. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο ελαστικό μέσο είναι της μορφής:

$$y = 2Aσυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T}$$

Συγκρίνοντάς τη με την εξίσωση που μας δίνεται προκύπτει:

$2A = 0{,}4\text{ m} \Rightarrow$ **$A = 0{,}2$ m**, $\frac{2πx}{λ} = 2{,}5πx \Rightarrow$ **$λ = 0{,}8$ m** και $\frac{2πt}{T} = 10πt \Rightarrow$ **$T = 0{,}2$ s** και $f = \frac{1}{T} \Rightarrow$ **$f = 5$ Hz** και $υ = λf \Rightarrow$ **$υ = 4$ m/s**

Για τον αριθμό των κοιλιών έχουμε: $x_κ = N\frac{λ}{2} \Rightarrow$ **$x_κ = 0{,}4N$** με $N = 0, \pm1, \pm2, ...$

Επειδή ζητάμε το πλήθος των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ και Λ, πρέπει:

$-2{,}4\text{ m} < x_κ < +1{,}3\text{ m} \Rightarrow -2{,}4 < 0{,}4N < 1{,}3 \Rightarrow -6 < N < 3{,}25$

Δηλαδή N = –5, –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3. Συνεπώς **υπάρχουν 9 κοιλίες** μεταξύ των σημείων Κ και Λ.

Για τον αριθμό των δεσμών έχουμε: $x_δ = (2N+1)\frac{λ}{4} \Rightarrow x_δ = (2N + 1)\cdot 0{,}2 \Rightarrow$ **$x_δ = 0{,}4N + 0{,}2$** με $N = 0, \pm1..$

Πρέπει $-2{,}4\text{ m} < x_δ < +1{,}3$ m. Συνεπώς: $-2{,}4 < 0{,}4N + 0{,}2 < 1{,}3 \Rightarrow -2{,}6 < 0{,}4N < 1{,}1 \Rightarrow -6{,}5 < N < 2{,}75$

Δηλαδή N = –6, –5 –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2. Συνεπώς **υπάρχουν 9 δεσμοί** μεταξύ των σημείων Κ και Λ.

β. 1ος τρόπος: (με τις χρονικές εξισώσεις ταχύτητας)

Η εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι η:

$y_K = 0{,}4συν(2{,}5πx_K)·ημ(10πt) \Rightarrow y_K = 0{,}4συν(–6π)·ημ(10πt) \Rightarrow \mathbf{y_K = 0{,}4ημ(10πt)}$ **(S.I.)**

Επομένως η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Κ είναι η:

$υ_K = ωA_Kσυνωt \Rightarrow \mathbf{υ_K = 4πσυν(10πt)}$ **(S.I.) (1)**

Αντίστοιχα, η εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ είναι η:

$y_Λ = 0{,}4συν(2{,}5πx_Λ)·ημ(10πt) \Rightarrow y_Λ = 0{,}4συν(5π·1{,}3)·ημ(10πt) \Rightarrow y_Λ = 0{,}4συν(3{,}25π)·ημ(10πt) \Rightarrow$

$\mathbf{y_Λ = -0{,}2\sqrt{2}ημ(10πt)}$ **(S.I.)**

Συνεπώς η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ είναι η:

$υ_Λ = –ωA_Λσυν(10πt) \Rightarrow \mathbf{υ_Λ = -2π\sqrt{2}συν(10πt)}$ **(S.I.) (2)**

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει: $\frac{υ_K}{υ_Λ} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{υ_Λ = -\frac{\sqrt{2}}{2}υ_K}$ για κάθε χρονική στιγμή.

Τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα είναι:

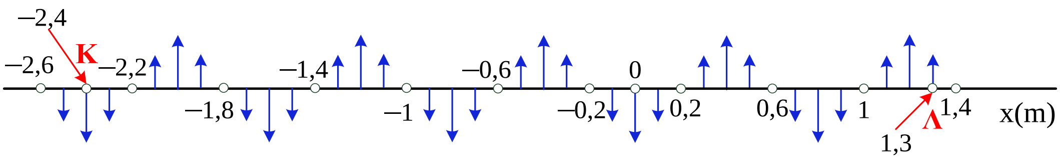
$υ_K = +υ_{max(K)} = 4π$ m/s

Συνεπώς την ίδια χρονική στιγμή η ταχύτητα του υλικού σημείου Λ είναι:

$υ_Λ = -\frac{\sqrt{2}}{2}4π \Rightarrow \mathbf{υ_Λ = -2π\sqrt{2}\frac{m}{s}}$

2ος τρόπος: (με τη διαφορά φάσης)

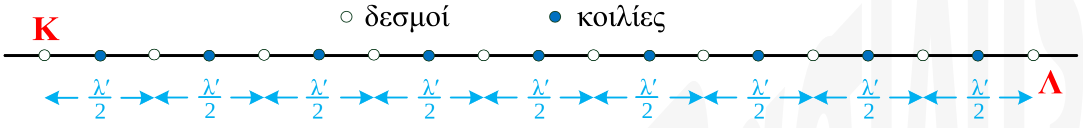
Μεταξύ των σημείων Κ και Λ υπάρχουν 9 δεσμοί. Επειδή μεταξύ



των σημείων Κ και Λ υπάρχουν 9 δεσμοί (δηλαδή περιττός αριθμός), οι ταλαντώσεις αυτών των σημείων εμφανίζουν διαφορά φάσης ίση με π rad. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Κ και Λ διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους κινούμενα προς αντίθετες κατευθύνσεις. Άρα, όταν το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $\upsilon_K = +\upsilon_{max(K)}$, το υλικό σημείο Λ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $\upsilon_\Lambda = -\upsilon_{max(\Lambda)}$, όπως φαίνεται και στο διπλανό στιγμιότυπο. Είναι: $\upsilon_{max(\Lambda)} = \omega A_\Lambda$

Έχουμε $A_\Lambda = |0{,}4\sigma\upsilon\nu(2{,}5\pi x_\Lambda)| \Rightarrow \mathbf{A_\Lambda = 0{,}2\sqrt{2}\,m}$. Συνεπώς: $\mathbf{\upsilon_\Lambda = -2\pi\sqrt{2}\,\frac{m}{s}}$.

γ. Η απόσταση ΚΛ είναι: $(K\Lambda) = |x_K| + |x_\Lambda| \Rightarrow (K\Lambda) = 3{,}7$ m



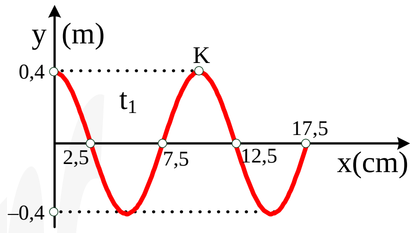
Οι κοιλίες και οι δεσμοί που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ μετά την αλλαγή της συχνότητας φαίνονται στο σχήμα.

Συνεπώς: $(K\Lambda) = 8\dfrac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \dfrac{(K\Lambda)}{4} \Rightarrow \mathbf{\lambda' = 0{,}925\ m}$

Όμως: $\upsilon = \lambda' f' \Rightarrow f' = \dfrac{\upsilon}{\lambda'} \Rightarrow f' = \dfrac{4}{0{,}925} \Rightarrow \mathbf{f' = \dfrac{16}{37}\,Hz}$

Άρα: $\Delta f = f' - f \Rightarrow \Delta f = \dfrac{16}{37} - 5 \Rightarrow \mathbf{\Delta f = -\dfrac{169}{37}\,Hz}$

Δηλαδή πρέπει να μειώσουμε τη συχνότητα κατά $\dfrac{169}{37}$ Hz .



6. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος σε μια χρονική στιγμή t_1 στιγμιαίας ακινητοποίησης των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου. Το υλικό σημείο $K(x_K = +10\text{ cm})$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t_1 αφού περάσει χρόνος 0,5 s από τη στιγμή t_1.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των δύο τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές:

i. $t_2 = t_1 + 0{,}5\text{ s}$ και **ii.** $t_3 = t_1 + 1\text{ s}$.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης ταλάντωσης και της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τις στιγμές που η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ισούται με 0,2 m.

Δίνεται για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που δίνεται στην εκφώνηση προκύπτουν οι εξής πληροφορίες:

Επειδή η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών ισούται με $\frac{\lambda}{2}$, έχουμε ότι:

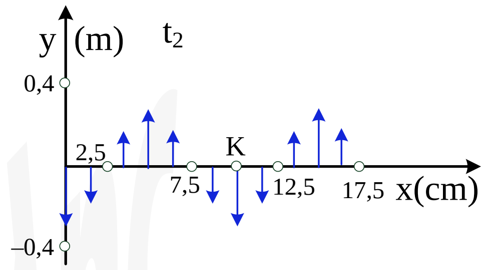
$$\frac{\lambda}{2} = 5\text{ cm} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 10\text{ cm}}$$

Η χρονική στιγμή t_1 είναι μια χρονική στιγμή στιγμιαίας ακινητοποίησης όλων των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου. Συνεπώς όλα τα υλικά σημεία βρίσκονται σε ακραία θέση της ταλάντωσής τους. Το υλικό σημείο Κ βρίσκεται σε κοιλία και το πλάτος της ταλάντωσής του (άρα και το πλάτος κάθε κοιλίας) είναι $A_K = 0{,}4\text{ m}$.

Η χρονική διάρκεια Δt που απαιτείται ώστε το υλικό σημείο Κ να διέλθει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά τη στιγμή t_1 ισούται με $\frac{T}{4}$. Άρα: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4\Delta t \Rightarrow \mathbf{T = 2\,s}$

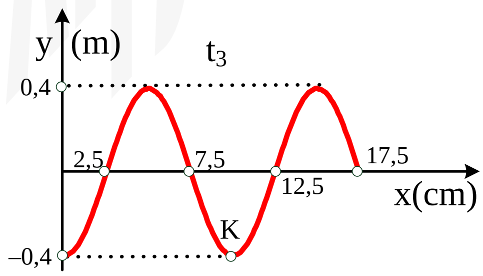
Επομένως: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 5\text{ cm/s}}$

β. i. Επειδή $\frac{T}{4} = 0,5$ s, η χρονική στιγμή t_2 είναι η $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$,



Μετά από χρόνο $\frac{T}{4}$ από τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, με το υλικό σημείο Κ να κινείται προς τη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση. Το στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ii. Η χρονική στιγμή t_3 είναι η $t_3 = t_1 + \frac{T}{2}$.



Το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση και όλα τα υλικά σημεία του μέσου βρίσκονται σε ακραία θέση. Το στιγμιότυπο φαίνεται στο σχήμα.

γ. Κάθε υλικό σημείο του μέσου που ταλαντώνεται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, έχοντας το "δικό του" πλάτος. Το υλικό σημείο Κ ταλαντώνεται με πλάτος $A_K = 0,4$ m. Έχουμε: $\alpha_K = -\omega^2 y_K$

Όμως $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$ **$\omega = \pi$ rad/s**. Επομένως, όταν $y_K = +0,2$ m, το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

$|\alpha_K| = \pi^2 \cdot 0,2$ m/s$^2 \Rightarrow$ **$|\alpha_K| = 2$ m/s^2**.

Για την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Κ έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 A_K^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_K^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y_K^2 \Rightarrow |\upsilon_K| = \omega\sqrt{A_K^2 - y_K^2} \Rightarrow \mathbf{|\upsilon_K| = 0,2\pi\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}.$$

7. Ελαστική χορδή ΟΑ μήκους L = 0,75 m, που βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα x′Ox, έχει στερεωμένο το ένα της άκρο Α (δεξί άκρο) σε ακλόνητο σημείο στη θέση x = L του άξονα, ενώ το άλλο της άκρο Ο (αριστερό άκρο) βρίσκεται στη θέση x = 0 του άξονα και είναι ελεύθερο να κινείται. Με κατάλληλη διαδικασία δημιουργείται στη χορδή στάσιμο κύμα με 3 συνολικά δεσμούς. Στη θέση x = 0 του άξονα εμφανίζεται κοιλία και το υλικό σημείο της χορδής που βρίσκεται στη θέση αυτή του άξονα διέρχεται τη χρονική στιγμή t = 0 από τη θέση ισορροπίας του με μέγιστη θετική ταχύτητα μέτρου 2π m/s, ενώ βρίσκεται σε ακραία θέση κάθε 0,1 s.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν στην ελαστική χορδή το στάσιμο κύμα.

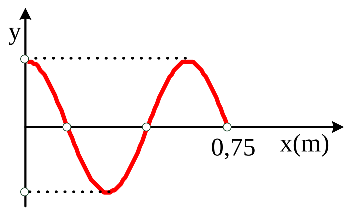
β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13}{60}$ s.

δ. Κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε την συχνότητα της χορδής ώστε να εμφανίζονται δύο περισσότεροι δεσμοί στην χορδή παραμένοντας το σημείο Ο κοιλία.

Λύση

α. Σύμφωνα με την εκφώνηση, στην ελαστική χορδή έχουν σχηματιστεί 3 συνολικά δεσμοί (μαζί με το δεξί άκρο που βρίσκεται στη θέση x = L του άξονα), ενώ στο αριστερό άκρο της (x = 0) σχηματίζεται κοιλία. Σχηματίζουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος μία τυχαία χρονική στιγμή όπου το άκρο Ο της χορδής βρίσκεται στο θετικό άκρο.



Από το σχήμα προκύπτει: $L = \lambda + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{5\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{5} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 0,6\,m}$.

Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο βρίσκεται σε ακραία θέση κάθε 0,1 s όπου αυτό αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $\frac{T}{2}$ άρα $\frac{T}{2} = 0,1\text{s} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\,s}$ και **f = 5 Hz**.

Η ταχύτητα διάδοσης προκύπτει από τον τύπο: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow$ **υ = 3 m/s**.

β. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα περνά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα μέτρου 2π m/s. Είναι: $\upsilon_{max} = \omega A_O$

Όμως $\omega = 2\pi f \Rightarrow$ **ω = 10π rad/s**. Άρα: $A_O = \dfrac{2\pi}{10\pi}\ \text{m} \Rightarrow$ **A_O = 0,2 m**

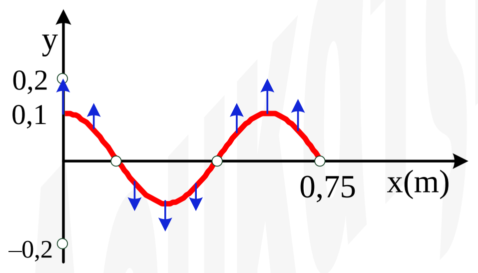
Το πλάτος αυτό είναι το πλάτος της ταλάντωσης κάθε κοιλίας του στάσιμου κύματος. Επειδή το άκρο O(x = 0) είναι κοιλία, η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y = 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{0,6}\eta\mu 10\pi t \Rightarrow \mathbf{y = 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi x}{3}\eta\mu 10\pi t \quad (S.I.)}$$

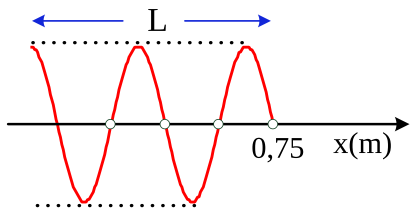
γ. Αντικαθιστούμε την χρονική στιγμή t_1 στην εξίσωση του στάσιμου κύματος και προκύπτει:

$$y = 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi x}{3}\eta\mu 10\pi\frac{13}{60} \Rightarrow y = 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi x}{3}\eta\mu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow \mathbf{y = 0,1\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi x}{3} \quad (S.I.)}$$

Η φάση $\varphi = \dfrac{13\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{6}\text{rad}$ αντιστοιχεί σε γωνία που ανήκει στο 1° τεταρτημόριο, οπότε dt μετά το ημίτονο θα έχει πάλι θετική τιμή δηλαδή το σημείο O κινείται προς το θετικό άκρο της ταλάντωσης του.



δ. Θέλουμε στην χορδή να εμφανίζονται συνολικά 5 δεσμοί (μαζί με το άκρο). Το στιγμιότυπο κάποια χρονική στιγμή που το σημείο O θα βρίσκεται στο θετικό του άκρο θα είναι όπως δίπλα. Άρα



$$L = 2\lambda' + \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{9\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{9\upsilon}{4f'} \Rightarrow f' = \frac{9\upsilon}{4L} \Rightarrow f' = \frac{9\cdot 3}{4\cdot 0,75} \Rightarrow \mathbf{f' = 9\,Hz}$$

Τελικά $\Delta f = f' - f \Rightarrow$ **Δf = 4 Hz**.

Δηλαδή πρέπει η συχνότητα να αυξηθεί κατά 4 Hz

8. Σε χορδή μήκους L = 1,2 m, η οποία έχει τα δύο άκρα της ακλόνητα στερεωμένα, δημιουργείται στάσιμο κύμα που προέρχεται από τη συμβολή δύο τρεχόντων κυμάτων με μήκος κύματος λ.

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υλικών σημείων της χορδής που πάλλονται με μέγιστο πλάτος, αν δίνεται ότι το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων ισούται με λ = 0,4 m.

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή που η πλησιέστερη κοιλία στο αριστερό άκρο O της χορδής βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

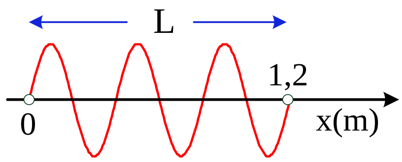
γ. Να υπολογίσετε κατά πόσο πρέπει να μεταβάλλουμε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων, ώστε στη χορδή να δημιουργηθούν 8 κοιλίες.

δ. Στην περίπτωση όπου στη χορδή δημιουργούνται 8 κοιλίες, να υπολογίσετε το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος που δημιουργείται στον αέρα εξαιτίας της ταλάντωσης της χορδής, αν δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων στη χορδή ισούται με υ = 127,5 m/s.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα: $\upsilon_{\eta\chi}$ = 340 m/s.

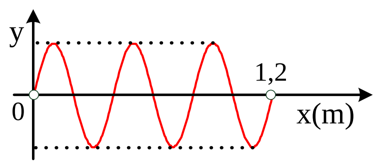
Λύση

α. Τα δύο άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα, οπότε με το σχηματισμό του στάσιμου κύματος τα δύο αυτά σημεία συμπεριφέρονται ως δεσμοί. Έτσι λοιπόν, το κύμα που θα εμφανίζεται στην χορδή θα είναι όπως στο σχήμα. Δηλαδή κάποιος αριθμός με ατράκτους που έχουν μήκος λ/2 μεταξύ τους.



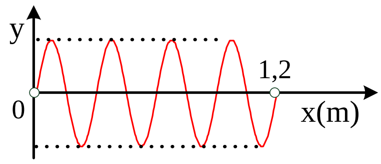
Οπότε $L = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 1,2 = \kappa 0,2 \Rightarrow \kappa = 6$. Κάθε άτρακτος περιλαμβάνει μία κοιλία, συνεπώς έχουμε συνολικά 6 κοιλίες.

β. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται που περιλαμβάνει 6 κοιλίες και 7 δεσμούς φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Αφού πρέπει να υπάρχουν 8 κοιλίες, θα είναι κ = 8. Επομένως:

$L = \kappa\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow 1,2 = 8\cdot\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda' = 0,3\ m}$



Άρα πρέπει να μειώσουμε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων κατά $|\Delta\lambda| = |\lambda' - \lambda| \Rightarrow$ **$|\Delta\lambda| = 0{,}1$ m**.

δ. Η συχνότητα του ηχητικού κύματος που δημιουργείται στον αέρα ισούται με τη συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής που ταλαντώνονται. Έχουμε: $\frac{\upsilon}{\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{\lambda' f}{\lambda_{\eta\chi} f} \Rightarrow \frac{127{,}5}{340} = \frac{0{,}3}{\lambda_{\eta\chi}} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_{\eta\chi} = 0{,}8\,\mathrm{m}}$.

9. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδονται δύο κύματα με αντίθετη φορά που έχουν εξισώσεις $y_1 = 0{,}1ημ(4πt - 2πx + π)$ (S.I.) και $y_2 = 0{,}1ημ(4πt + 2πx)$ (S.I.). Τα δύο κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών στο θετικό ημιάξονα Ox.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων O και K(x_K = 3 m) τη χρονική στιγμή t_1 = 1,5 s.

Λύση

α. Τα δύο τρέχοντα κύματα διαδίδονται στο γραμμικό ελαστικό μέσο και συμβάλλοντας δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Η απομάκρυνσης κάθε υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του ισούται με το άθροισμα των απομακρύνσεων $y_1 + y_2$ που προκαλούν τα δύο κύματα. Έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = 0{,}1[ημ(4πt - 2πx + π) + ημ(4πt + 2πx)]$$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $ημα + ημβ = 2συν\dfrac{α-β}{2}\cdot ημ\dfrac{α+β}{2}$

$$y = 2\cdot 0{,}1συν\frac{4πt - 2πx + π - 4πt - 2πx}{2}ημ\frac{4πt - 2πx + π + 4πt + 2πx}{2} \Rightarrow y = 0{,}2συν(-2πx + \frac{π}{2})ημ(4πt + \frac{π}{2})$$

$\Rightarrow$ **y = 0,2ημ(2πx)συν(4πt)   (S.I.)**

β. Το πλάτος του στάσιμου κύματος δίνεται από τον τύπο: $A' = |0{,}2ημ(2πx)|$ (S.I.)

Για τις θέσεις των κοιλιών έχουμε: $A' = 2A = 0{,}2\text{ m} \Rightarrow ημ(2πx_κ) = \pm 1 \Rightarrow$

$2πx_κ = (2N+1)\dfrac{π}{2}$ με   N = 0, 1, 2,...   (θετικός ημιάξονας)

$\Rightarrow x_κ = \dfrac{2N+1}{4}\text{m}$ με   N = 0, 1, 2,...

Για N = 0 είναι $x_κ$ = 0,25 m.   Για N = 1 είναι $x_κ$ = 0,75 m.   Για N = 2 είναι $x_κ$ = 1,25 m. Για N=3 είναι $x_κ$ = 1,75 m.   Για N = 4 είναι $x_κ$ = 2,25 m κ.ο.κ.

Για τις θέσεις των δεσμών έχουμε: $A' = 0 \Rightarrow ημ(2πx_δ) = 0$

$2\pi x_\delta = N\pi$ με $N = 0,1,2,...$ (θετικός ημιάξονας) $\Rightarrow x_\delta = \frac{N}{2}\,m$ με $N = 0,1,2,...$

Για $N = 0$ είναι $\chi_\delta = 0$. Για $N = 1$ είναι $x_\delta = 0,5$ m. Για $N = 2$ είναι $x_\delta = 1$ m. Για $N = 3$ είναι $x_\delta = 1,5$ m.

Για $N = 4$ είναι $x_\delta = 2$ m κ.ο.κ.

Παρατήρηση: Στην αρχή O(x = 0) του άξονα σχηματίζεται δεσμός.

γ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5$ s είναι: $y = 0,2ημ(2πx)συν(4π\cdot 1,5) \Rightarrow$ **$y = 0,2ημ(2πx)$ (S.I.)**

Το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.