ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με αρχική φάση.

1. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος 0,2 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, εξαναγκάζοντας το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα να ξεκινήσει να ταλαντώνεται αρμονικά από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα μια προγενέστερη χρονική στιγμή από την t = 0. Η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο O από την t = 0 και μετά που ξεκινήσαμε να μελετάμε την κίνηση του είναι η $y_O = 0{,}2ημ(10πt + 5π)$ (S.I.). Να γράψετε:

α. την εξίσωση του αρμονικού κύματος,

β. τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου $M(x_M = 5\text{ m})$.

Λύση

α. 1ος τρόπος. Γνωρίζοντας τη χρονική εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου O(x = 0), μπορούμε να βρούμε τη χρονική εξίσωση ταλάντωσης ενός τυχαίου σημείου K του ελαστικού μέσου που έχει τετμημένη x (εξίσωση του κύματος).

Η ταλάντωση του υλικού σημείου O εμφανίζει διαφορά φάσης Δφ με την ταλάντωση του τυχαίου υλικού σημείου K του ελαστικού μέσου και μάλιστα η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου O είναι μεγαλύτερη της φάσης της ταλάντωσης του τυχαίου σημείου K κάθε στιγμή, αφού το σημείο O είχε ξεκινήσει να ταλαντώνεται πριν από το σημείο K. Επειδή η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης του υλικού σημείου O είναι η $y_O = 0{,}2ημ(10πt + 5π)$ (S.I.), η χρονική εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου σημείου K (εξίσωση του κύματος) είναι η: $y = 0{,}2ημ(10πt + 7π – Δφ)$ (S.I.)

Είναι: $Δφ = ωΔt_{OK} \Rightarrow Δφ = \dfrac{2π}{T}\dfrac{x}{υ} \Rightarrow Δφ = \dfrac{2πx}{λ} \Rightarrow Δφ = 10πx$ (S.I.)

Συνεπώς: **$y = 0{,}2ημ(10πt – 10πx + 5π)$ (S.I.)**.

2ος τρόπος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση για το κύμα με αρχική φάση $y = Aημ\left[2π\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{λ}\right) + φ_0\right] \Rightarrow y = Aημ(ωt - \dfrac{2πx}{λ} + φ_0)$

Από την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής έχουμε ότι: A = 0,2 m, ω = 10π rad/s και $\varphi_0 = 5\pi$ rad και με αντικατάσταση $y = A\eta\mu(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{0,2} + 5\pi) \Rightarrow \mathbf{y = 0,2\eta\mu(10\pi t - 10\pi x + 5\pi)(S.I.)}$

β. Θα βρούμε πρώτα τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου $M(x_M = 5\ m)$ από τη θέση ισορροπίας του, η οποία προκύπτει αν στην εξίσωση του κύματος θέσουμε όπου $x = x_M = 5$ m. Είναι:

$y_M = 0,2\eta\mu(10\pi t - 10\pi x_M + 5\pi) \Rightarrow y_M = 0,2\eta\mu(10\pi t - 50\pi + 5\pi) \Rightarrow \mathbf{y_M = 0,2\eta\mu(10\pi t - 45\pi)\ \ (S.I.)}$

Η εξίσωση αυτή ισχύει από τη στιγμή που το σημείο Μ ξεκινά την ταλάντωση του. Επειδή το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά την ταλάντωση του από τη Θ.Ι με υ > 0, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου θα ξεκινούν την ταλάντωση τους με τον ίδιο τρόπο. Επομένως για όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου η φάση της ταλάντωσης τους τη στιγμή της έναρξης αυτής θα ισούται με μηδέν (αφού y = 0 και υ > 0). Με βάση τα παραπάνω, αν μηδενίσουμε τη φάση της ταλάντωσης του σημείου Μ, θα βρούμε τη χρονική στιγμή που αυτό το σημείο ξεκινά να ταλαντώνεται. Είναι: $\varphi_M = 10\pi t_M - 45\pi = 0 \Rightarrow t_M = 4,5$ s

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ είναι: $\upsilon_M = \omega A\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 45\pi)$ (S.I.) για $t \geq t_M$ ή $\mathbf{\upsilon_M = 2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 45\pi)\ \ (S.I.)}$ για $t \geq 4,5$ s

2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα με εξίσωση $y = 0{,}5ημ2π(5t – 4x + 2)$ (S.I.) και κάθε υλικό σημείο του μέσου στο οποίο φτάνει το κύμα ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

α. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Κ του ελαστικού μέσου που ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$.

β. Να σχεδιάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων το στιγμιότυπο του κύματος για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στο θετικό ημιάξονα τις χρονικές στιγμές: **i.** $t = 0$ και **ii.** $t_1 = 0{,}25$ s.

γ. Να βρείτε την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα τη χρονική στιγμή που η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου $Δ(x_Δ = \frac{1}{24}$ m) ισούται με 4,5π rad.

Λύση

α. Η φάση του κύματος είναι η: $φ = 2π(5t – 4x + 2) \Rightarrow φ = 10πt – 8πx + 4π$ (S.I.)

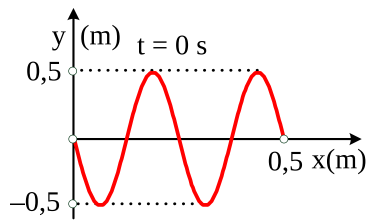
Επειδή κάθε υλικό σημείο του μέσου στο οποίο φτάνει το κύμα ξεκινά να ταλαντώνεται από τη Θ.Ι. του με $υ > 0$, τη στιγμή που κάποιο υλικό σημείο ξεκινά να ταλαντώνεται η φάση της ταλάντωσης του ισούται με μηδέν. Συνεπώς θέτοντας στη φάση του κύματος όπου $t = 0$ και μηδενίζοντας τη βρίσκουμε την τετμημένη του υλικού σημείου Κ που ξεκινά να ταλαντώνεται την $t = 0$. $0 = –8πx_K + 4π \Rightarrow$ $\mathbf{x_K = 0{,}5}$ **m**

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο O(x = 0)

β. i. Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει φτάσει μέχρι το σημείο $K(x_K = 0{,}5$ m). Επειδή η εξίσωση του κύματος είναι η: $y = 0{,}2ημ(10πt – 8πx + 4π)$ (S.I.) δηλαδή είναι της μορφής: $y = Aημ\left(ωt - \frac{2πx}{λ} + φ_0\right)$

προκύπτει $ω = 10π$ rad/s $\Rightarrow T = 0{,}2$ s και $λ = 0{,}25$ m.

Είναι: $x_K = 0{,}5$ m άρα τα όρη (ή οι κορυφές) είναι: $N = \frac{2x_K}{λ} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}25} \Rightarrow N = 4$

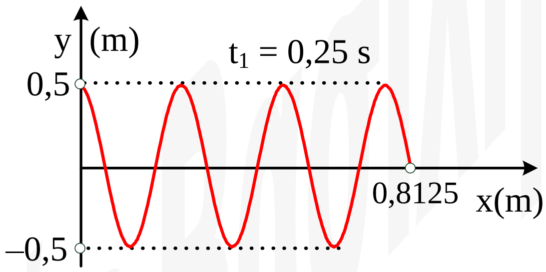


Άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

ii. Βρίσκουμε πόσο μακριά από το Ο(x = 0) έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}25$ s μηδενίζοντας τη φάση του κύματος: $0 = 10\pi t_1 - 8\pi x_1 + 4\pi \Rightarrow x_1 = 0{,}8125$ m

Άρα θα έχουμε: $N = \dfrac{2x_1}{\lambda} = \dfrac{2\cdot 0{,}8125}{0{,}25} \Rightarrow N = 6{,}5$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ. Η διαφορά φάσης Δφ των ταλαντώσεων των δύο υλικών σημείων Ο και Δ($x_\Delta = \dfrac{1}{24}$ m) είναι:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t_{O\Delta} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3}\ \text{rad.}$$

Αφού το κύμα διαδίδεται από το Ο προς το Δ, είναι $\varphi_O > \varphi_\Delta$. Άρα τη χρονική στιγμή που $\varphi_\Delta = 4{,}5\pi$ rad είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_\Delta \Rightarrow \varphi_O = \Delta\varphi + \varphi_\Delta \Rightarrow \varphi_O = 4{,}5\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_O = \frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_O = \frac{29\pi}{6} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_O = 4\pi + \frac{5\pi}{6}\ \text{rad}}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου Ο(x = 0) από τη Θ.Ι. του είναι η:

$y_O = A\eta\mu\varphi_O$

Την ίδια στιγμή η ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Ο(x = 0) είναι:

$\upsilon_O = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_O \Rightarrow \upsilon_O = 5\pi\sigma\upsilon\nu(4\pi + \dfrac{5\pi}{6}) \Rightarrow$ $\boldsymbol{\upsilon_O = -2{,}5\pi\sqrt{3}}$ **m/s**.

3. Σε χορδή που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα 4 m/s προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα. Το υλικό σημείο Z(x_Z = 8 m) της χορδής ξεκινά τη χρονική στιγμή t = 0 να ταλαντώνεται με θετική ταχύτητα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y_Z = 0,4ημ20πt (S.I.).

α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την τετμημένη x των σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 = 2,25 s.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Α του αρνητικού ημιάξονα σε συνάρτηση με το χρόνο, γνωρίζοντας ότι η ταλάντωση του εμφανίζει με την ταλάντωση του σημείου Ζ διαφορά φάσης 80π rad.

Λύση

α. Το κύμα διαδίδεται από το τυχαίο σημείο Θ προς το σημείο Ζ του ελαστικού μέσου. Αφού η εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου Ζ είναι η y_Z = 0,4ημ20πt (S.I.), η εξίσωση ταλάντωσης του τυχαίου υλικού σημείου Θ (εξίσωση του κύματος) είναι η: y = 0,4ημ(20πt + Δφ) (1) όπου Δφ η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του τυχαίου υλικού σημείου Θ και του υλικού σημείου Ζ. (Είναι + Δφ, αφού η ταλάντωση του Θ προηγείται της ταλάντωσης του Ζ.) Όμως:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t_{\Theta Z} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{(\Theta Z)}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi(x - x_Z)}{\lambda}$$

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$ **T = 0,1 s** και $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon T \Rightarrow$ **λ = 0,4 m** Άρα:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x-8)}{0,4} \Rightarrow \Delta\varphi = 5\pi x - 40\pi \quad \text{(S.I.)}$$

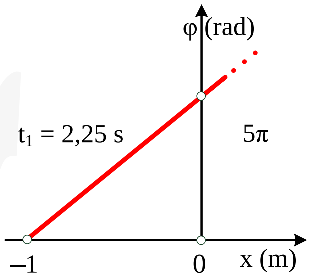
Από την (1) προκύπτει: **y = 0,4ημ(20πt + 5πx – 40π) (S.I.)**

β. Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η: φ = 20πt + 5πx – 40π (S.I.)

Για t = t_1 = 2,25 s είναι: **φ = 5πx + 5π (S.I.)**

Η σχέση αυτή δεν ισχύει για όλα τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου. Αφού το υλικό σημείο Κ της χορδής ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με $υ > 0$, για κάθε υλικό σημείο που έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει $φ > 0$. Άρα: $5πx + 5π \geq 0 \Rightarrow$ **$x \geq -1$ m**

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



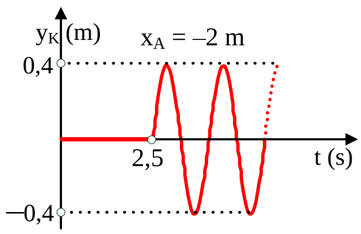
γ. Έχουμε ότι $Δφ_{ZA} = 80π$ rad. Όμως: $Δφ_{ZA} = \dfrac{2π(ZA)}{λ} \Rightarrow$ **$(ZA) = 10\,m$**

Αφού το σημείο Ζ έχει τετμημένη $x_Z = 8$ m, δηλαδή (ΟΖ) = 8 m, και το σημείο Α βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα, είναι: $(AZ) = (OZ) + |(OA)| \Rightarrow |(OA)| = 2\text{ m} \Rightarrow (OA) = -2$ m

Συνεπώς: $x_A = -2$ m

Για να βρούμε πότε ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό αυτό σημείο, θέτουμε στην εξίσωση της φάσης του κύματος όπου $x = x_A = -2$ m και τη μηδενίζουμε: $0 = 20πt_A + 5πx_A - 40π \Rightarrow t_A = 2{,}5$ s

Αφού κάθε υλικό σημείο από τη στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος 0,5 m ξεκινώντας από τη Θ.Ι. του με $υ > 0$, η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το μέτωπο του κύματος είναι κοιλάδα

4. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 0,3 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με το θετικό οριζόντιο ημιάξονα Ox. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στο άκρο O(x = 0) του ελαστικού μέσου και ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με φορά προς τη μέγιστη αρνητική της απομάκρυνση, έχοντας μέγιστη ταχύτητα μέτρου 3π m/s. Η οριζόντια απόσταση d μεταξύ δύο υλικών σημείων Κ και Λ του ελαστικού μέσου που οι ταλαντώσεις τους εμφανίζουν κάθε χρονική στιγμή διαφορά φάσης 150° ισούται με $\frac{1}{6}$ m.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 = 0,4 s.

Λύση

α. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση $\upsilon_{max} = \omega A$, οπότε **ω = 10π rad/s**. Άρα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \mathbf{T = 0,2\,s}$$

Η διαφορά φάσης των δύο υλικών σημείων Κ και Λ του ελαστικού μέσου ικανοποιεί τη σχέση: $\Delta\varphi_{K\Lambda} = \omega \cdot \Delta t$ όπου Δt η χρονική διάρκεια διάδοσης του κύματος από το ένα υλικό σημείο στο άλλο. Είναι:

$$\Delta\varphi_{K\Lambda} = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{K\Lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi d}{\Delta\varphi_{K\Lambda}}$$

Έχουμε ότι $\Delta\varphi_{K\Lambda} = 150° = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad}$. Συνεπώς: $\lambda = \frac{2\pi \cdot 1/6}{5\pi/6} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 0,4\,m}$

Η ταχύτητα διάδοσης υπολογίζεται από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 2\,\frac{m}{s}}$.

β. Το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 από τη Θ.Ι. του με υ < 0.

Συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσης του είναι η: $y_O = A\eta\mu(\omega t + \pi) \Rightarrow$ **y_O = 0,3ημ(10πt + π) (S.I.)**

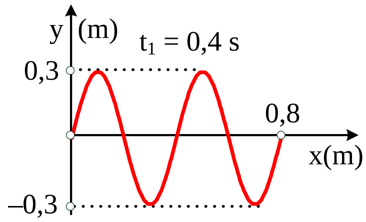
Για ένα τυχαίο σημείο Σ του ελαστικού μέσου με τετμημένη x η εξίσωση της ταλάντωσης του (εξίσωση κύματος) είναι η: $y_Σ = 0{,}3ημ(10πt + π – Δφ)$ (S.I.) όπου Δφ η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Ο και Σ. (Είναι –Δφ, αφού η ταλάντωση του Ο προηγείται της ταλάντωσης του Σ.) Ισχύει:

$$Δφ = ω\cdot Δt_{ΟΣ} \Rightarrow Δφ = \frac{2πx}{λ} \Rightarrow Δφ = \frac{π}{0,4}x \Rightarrow \mathbf{Δφ = 2,5πx\ \ (S.I.)}$$

Επομένως: $y = 0{,}3ημ \Rightarrow \mathbf{y = 0,3ημ(10πt - 2,5πx + π)\ \ \ (S.I.)}$

γ. Αφού την t = 0 το κύμα ξεκινά να διαδίδεται από την πηγή η οποία βρίσκεται στο αριστερό άκρο Ο(x = 0), για να βρούμε πόσο μακριά έχει φτάσει το κύμα από το σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}4$ s, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $υ = \frac{d_1}{t_1} \Rightarrow d_1 = υt_1 \Rightarrow \mathbf{d_1 = 0,8\,m}$

Χωρίζουμε τον άξονα σε $N = \frac{2d_1}{λ} \Rightarrow \mathbf{N = 4}$ (μισά κύματα (4 λ/2))



Επειδή η πηγή του κύματος ξεκινά την ταλάντωση της από τη Θ.Ι. της με υ < 0, όλα τα υλικά σημεία θα ξεκινούν την ταλάντωση τους με τον ίδιο τρόπο. Το στιγμιότυπο του κύματος είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

Παρατήρηση: Για να βρούμε πόσο μακριά από το Ο έφτασε το κύμα μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_1 χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω άσκηση τον τύπο $υ = \frac{d_1}{t_1}$, μιας και την t = 0 το κύμα βρίσκεται στο Ο(x = 0) και δεν έχει περάσει πέρα από αυτό.

Αν θέλαμε να βρούμε την απόσταση αυτή χρησιμοποιώντας την έννοια της φάσης, τότε θα έπρεπε να σκεφτούμε ως εξής: Αφού το υλικό σημείο Ο(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται από τη Θ.Ι. του με υ < 0, η αρχική του φάση είναι π rad. Συνεπώς η ταλάντωση κάθε υλικού σημείου τη στιγμή που αυτό ξεκινά να ταλαντώνεται δε θα έχει φάση μηδέν, αλλά θα έχει φάση π rad (όπως και η ταλάντωση του Ο). Έτσι, στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πόσο μακριά έφτασε το κύμα από το Ο τη χρονική στιγμή t_1, δε θα μηδενίσουμε τη φάση, αλλά θα τη θέσουμε ίση με π rad. Είναι: $π = 10πt_1 - 2{,}5πd_1 + π \Rightarrow d_1 = 0{,}8\,m$