Η ΦΑΣΗ ΤΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Η φάση του αρμονικού κύματος

1. Πηγή αρμονικών κυμάτων συχνότητας 5 Hz εξαναγκάζει το άκρο O ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο ημιάξονα Ox, να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής y =Αημωt. Τα εγκάρσια κύματα που δημιουργούνται στο ελαστικό μέσο έχουν μήκος κύματος 0,4 m. Να υπολογίσετε:

α. τη φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου $\Sigma(x_\Sigma = 0{,}3\text{ m})$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}6$ s,

β. τη χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Σ με την βοήθεια της φάσης,

γ. τη μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου $\Lambda(x_\Lambda = 3\text{ m})$ στη χρονική διάρκεια από τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ s έως τη χρονική στιγμή $t_3 = 5$ s.

Λύση

α. Η περίοδος του κύματος και η γωνιακή του συχνότητα είναι αντίστοιχα:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}2\,s} \quad \text{και} \quad \omega = 2\pi f \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 8\pi}\ \mathbf{rad/s}$$

Αφού τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του ημιάξονα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με υ > 0 και το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι της μορφής: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 10\pi t - 5\pi x}$ **(S.I.)**

Για το υλικό σημείο $\Sigma(x_\Sigma = 0{,}3\text{ m})$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}6$ s η φάση είναι:

$\varphi_\Sigma = 10\pi \cdot 0{,}6 - 5\pi \cdot 0{,}3 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_\Sigma = 4{,}5\pi}$ **rad**

β. Αφού το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με υ > 0, όλα τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου όταν ξεκινούν να ταλαντώνονται από τη Θ.Ι. τους θα έχουν υ > 0 (φορά προς τα πάνω). Συνεπώς τη χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται ένα υλικό σημείο η φάση της ταλάντωσης του ισούται με μηδέν (αφού τη στιγμή εκείνη είναι y = 0 με υ > 0). Για να βρούμε τη χρονική στιγμή t_Σ που ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο $\Sigma(x_\Sigma = 0{,}5\text{ m})$, θα θέσουμε όπου $x_K = 0{,}5$ m στην εξίσωση της φάσης $\boldsymbol{\varphi_\Sigma = 10\pi t - 1{,}5\pi}$ **(S.I.)** και στη συνέχεια θα μηδενίσουμε τη φάση.

Έχουμε: $\varphi_\Sigma = 10\pi t - 1{,}5\pi \Rightarrow 0 = 10\pi t_\Sigma - 1{,}5\pi \Rightarrow \mathbf{t_\Sigma = 0{,}15\ s}$.

γ. Για να υπολογίσουμε την μεταβολή της φάσης σε ένα χρονικό διάστημα θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν το κύμα έχει φτάσει στο σημείο αυτό.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 0{,}4 \cdot 5 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 2\ m/s}$

Η χρονική στιγμή άφιξης του κύματος είναι: $\upsilon = \dfrac{x_\Lambda}{t_\Lambda} \Rightarrow t_\Lambda = \dfrac{x_\Lambda}{\upsilon} \Rightarrow t_\Lambda = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{t_\Lambda = 1{,}5 s}$

Η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου $\Lambda(x_\Lambda = 3\ m)$ στη χρονική διάρκεια $\Delta t = t_3 - t_2$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $\Delta\varphi = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = 10\pi \cdot 3 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi = 30\pi\ rad}$

2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x′Ox διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας 2 Hz και μήκους κύματος 0,4 m, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O του άξονα εκτελεί ταλαντώσεις με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $y_0 = 0{,}5ημωt$ (y σε m).

α. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων $K(x_K = 0{,}6$ m) και $Λ(x_Λ = 0{,}8$ m) του μέσου διάδοσης την ίδια χρονική στιγμή.

β. Να βρείτε τη χρονική διαφορά έναρξης των ταλαντώσεων των υλικών σημείων Κ και Λ.

γ. Αν κάποια χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, να βρείτε την απομάκρυνση του υλικού σημείου Λ από τη θέση ισορροπίας του την ίδια χρονική στιγμή.

δ. Δύο σημεία $Γ(x_Γ = 0{,}9$ m) και $Δ(x_Δ = 1{,}2$ m) βρίσκονται στην διεύθυνση της διάδοσης του κύματος και κάποια στιγμή το υλικό σημείο Γ βρίσκεται στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης να βρείτε την απομάκρυνση του υλικού σημείου Δ, την ίδια χρονική στιγμή καθώς επίσης και την ταχύτητα του.

Λύση

α. 1ος τρόπος: Οι ταλαντώσεις δύο υλικών σημείων του ελαστικού μέσου εμφανίζουν την ίδια χρονική στιγμή διαφορά φάσης. Αυτό συμβαίνει διότι οι ταλαντώσεις των δύο υλικών σημείων δεν ξεκινούν ταυτόχρονα, αφού το κύμα χρειάζεται κάποιο χρόνο για να διαδοθεί από το ένα σημείο στο άλλο. Μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ δίνεται από τη σχέση:

$φ_K = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{λ}\right)$ και την ίδια χρονική στιγμή t η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ δίνεται από τη σχέση: $φ_Λ = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Λ}{λ}\right)$

Επειδή $x_Λ > x_K$, προκύπτει με βάση τους δύο παραπάνω τύπους ότι $φ_K > φ_Λ$. Επομένως:

$$Δφ = φ_K - φ_Λ \Rightarrow Δφ = 2π\frac{x_Λ - x_K}{λ} \Rightarrow Δφ = 2π\frac{Δx_{KΛ}}{λ}$$

όπου $Δx_{KΛ}$ η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων. Είναι $Δx_{KΛ} = |\, x_Λ - x_K \,| = 0{,}2$ m, επομένως:

$$Δφ = 2π\frac{0{,}2}{0{,}4} \Rightarrow \mathbf{Δφ = π\ rad}$$

2ος τρόπος: Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi_{K\Lambda}$ μεταξύ των σημείων Κ και Λ υπολογίζεται από τη σχέση:

$\Delta\varphi_{K\Lambda} = \omega\cdot\Delta t_{K\Lambda}$ όπου $\Delta t_{K\Lambda}$ η χρονική διάρκεια που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα από το υλικό σημείο Κ στο υλικό σημείο Λ. Είναι: $\Delta\varphi_{K\Lambda} = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{\Delta x_{K\Lambda}}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{K\Lambda} = \dfrac{2\pi\Delta x_{K\Lambda}}{\lambda}$

όπου $\Delta x_{K\Lambda}$ η απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των δύο υλικών σημείων. Είναι:

$\Delta x_{K\Lambda} = |\, x_K - x_\Lambda| \Rightarrow d_{K\Lambda} = 0{,}2$ m, άρα $\mathbf{\Delta\varphi_{K\Lambda} = \pi}$ **rad**

Παρατήρηση: Αφού το κύμα διαδίδεται από το σημείο Κ προς το σημείο Λ, η φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ είναι μεγαλύτερη της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου Λ για την ίδια χρονική στιγμή, μιας και η φάση της ταλάντωσης του Κ είχε αρχίσει να μεγαλώνει πριν από την έναρξη της ταλάντωσης του σημείου Λ. Η διαφορά φάσης $\Delta\varphi_{K\Lambda} = \pi$ rad σημαίνει ότι από τη στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται το σημείο Κ μέχρι τη στιγμή της έναρξης της ταλάντωσης και του σημείου Λ το σημείο Κ έχει εκτελέσει μισή ταλάντωση. (Αν ήταν $\Delta\varphi_{K\Lambda} = 2\pi$ rad, θα είχε εκτελέσει μία ολόκληρη ταλάντωση, αν ήταν $\Delta\varphi_{K\Lambda} = 4\pi$ rad, θα είχε εκτελέσει δύο ταλαντώσεις, κ.ο.κ.)

β. Η ζητούμενη χρονική διαφορά ισούται με τη χρονική διάρκεια η οποία απαιτείται ώστε το κύμα να διαδοθεί από το ένα υλικό σημείο στο άλλο.

1ος τρόπος: Είναι: $\upsilon = \dfrac{\Delta x_{K\Lambda}}{\Delta t_{K\Lambda}} \Rightarrow \Delta t_{K\Lambda} = \dfrac{\Delta x_{K\Lambda}}{\upsilon}$

Έχουμε $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 2{,}5$ m/s. Άρα: $\mathbf{\Delta t_{K\Lambda} = 0{,}1}$ **s**

2ος τρόπος: Αφού γνωρίζουμε τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi_{K\Lambda}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο:

$$\Delta\varphi_{K\Lambda} = \omega\cdot\Delta t_{K\Lambda} \Rightarrow \Delta t_{K\Lambda} = \frac{\Delta\varphi_{K\Lambda}}{\omega}$$

Όμως $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 10\pi$ rad/s. Επομένως: $\mathbf{\Delta\varphi_{K\Lambda} = 0{,}1}$ **s**

γ. Οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων Κ και Λ έχουν την ίδια χρονική στιγμή διαφορά φάσης:

$\Delta\varphi = \pi$ rad $\Rightarrow \varphi_K - \varphi_\Lambda = \pi$ rad $\Rightarrow \varphi_\Lambda = \varphi_K - \pi$ rad

Η εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου Λ είναι: $y_\Lambda = A\eta\mu\varphi_\Lambda \Rightarrow y_\Lambda = A\eta\mu(\varphi_K - \pi) \Rightarrow y_\Lambda = -A\eta\mu\varphi_K$

Όμως είναι y_K = Αημ$φ_K$. Επομένως προκύπτει ότι $y_Λ = -y_K$ κάθε χρονική στιγμή. Επειδή τη χρονική στιγμή t_1 το υλικό σημείο Κ βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση ($y_K = +A$), το σημείο Λ την ίδια χρονική στιγμή θα βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική του απομάκρυνση.

Πράγματι: $y_Λ = - y_K \Rightarrow \mathbf{y_Λ = -A = -0{,}5\ m}$

δ. Η διαφορά φάσης μεταξύ του Γ και του Δ είναι όπως έχουμε δει και παραπάνω

$$Δφ_{ΓΔ} = \frac{2πΔx_{ΓΔ}}{λ} \Rightarrow Δφ_{ΓΔ} = \frac{2π0,3}{0,4} \Rightarrow \mathbf{Δφ_{ΓΔ} = \frac{3π}{2}rad}$$

Επειδή το σημείο βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή αυτό θα έχει και την μεγαλύτερη φάση οπότε

$$φ_Γ - φ_Δ = \frac{3π}{2} \Rightarrow φ_Δ = φ_Γ - \frac{3π}{2}$$

Το σημείο Γ βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση άρα:

$y_Γ = Αημφ_Γ \Rightarrow Α = Αημφ_Γ \Rightarrow ημφ_Γ = 1 \Rightarrow \mathbf{φ_Γ = 2κπ + \frac{π}{2}}$ και για το υλικό σημείο Δ θα έχουμε:

$$y_Δ = Αημφ_Δ = Αημ(φ_Γ - \frac{3π}{2}) = Αημ(2κπ + \frac{π}{2} - \frac{3π}{2}) = Αημ(2κπ - π) \Rightarrow \mathbf{y_Δ = 0}$$

και για την ταχύτητα: $υ_Δ = υ_{max}συνφ_Δ = υ_{max}συν(2κπ - π) \Rightarrow υ_Δ = -υ_{max} \Rightarrow \mathbf{υ_Δ = -2π\frac{m}{s}}$

3. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδεται αρμονικό κύμα πλάτους 0,3 m προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, εξαναγκάζοντας το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση της μορφής y_0 = Αημωt. Η φάση της ταλάντωσης του σημείου Κ(x_K = 1,6 m) μεταβάλλεται με ρυθμό 8π rad/s και τη χρονική στιγμή t_1 = 1,5 s ισούται με 8π rad.

α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου, σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, για τις χρονικές στιγμές:

i. t_2 = 2 s και **ii.** t_3 = 3 s.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο, σε κοινό σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, για τα υλικά σημεία: **i.** Α(x_A = 4,8 m) και **ii.** Β(x_B = 8 m).

Λύση

α. Αφού η εξίσωση ταλάντωσης του υλικού σημείου O(x = 0) είναι της μορφής y_0 = Αημωt και το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης ταλάντωσης ενός οποιουδήποτε υλικού σημείου ισούται με τη γωνιακή συχνότητα ω, συνεπώς **ω = 8π rad/s**. Είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \mathbf{T = 0,25\,s}$

Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι για x = x_K = 1,6 m, τη χρονική στιγμή t = t_1 = 1,5 s είναι φ_K = 8π rad.

Επομένως: $\varphi_{K(t_1)} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow 8\pi = 2\pi\left(\frac{1,5}{0,25} - \frac{1,6}{\lambda}\right) \Rightarrow \mathbf{\lambda = 0,8\,m}$

Άρα η εξίσωση του κύματος είναι: **y = 0,3ημ2π(4t – 1,25x) (S.I.)**

β. Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η: φ = 2π(4t – 1,25x) ⇒ **φ = 8πt – 2,5πx (S.I.)**

i. Για τη χρονική στιγμή t_2 = 2 s είναι $\boldsymbol{\varphi = 16\pi - 2{,}5\pi x}$ **(S.I.)**. Ο τύπος αυτός ισχύει για όλα τα x που ικανοποιούν τη σχέση $\varphi \geq 0$ (κανένα υλικό σημείο δεν μπορεί να έχει αρνητική φάση, μιας και όλα ξεκινούν από τη θέση ισορροπίας τους με $\upsilon > 0$).

Άρα: $\varphi = 0 \Rightarrow 16\pi - 2{,}5\pi x = 0 \Rightarrow x = 6{,}4$ m (ως εκεί έχει διαδοθεί το κύμα)

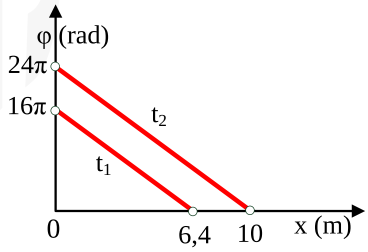
Επίσης για x = 0 είναι $\varphi_{(0)} = 16\pi$ rad.

ii. Για τη χρονική στιγμή t_3 = 3 s είναι $\varphi = 24\pi - 2{,}5\pi x$ (S.I.).

Επίσης έχουμε: $\varphi = 0 \Rightarrow 25\pi - 2{,}5\pi x = 0 \Rightarrow x = 10$ m

Επίσης για x = 0 είναι $\varphi_{(0)} = 24\pi$ rad.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



γ. i. Από την εξίσωση της φάσης του κύματος έχουμε για $x = x_A = 4{,}8$ m:

$\varphi_A = 8\pi t - 2{,}5\pi x_A \Rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi_A = 8\pi t - 12\pi}$ **(S.I.)**

Η εξίσωση αυτή ισχύει για όλες τις χρονικές στιγμές που ικανοποιούν τη σχέση:

$\varphi_A \geq 0 \Rightarrow 8\pi t_A - 12\pi \geq 0 \Rightarrow t_A \geq 1{,}5$ s

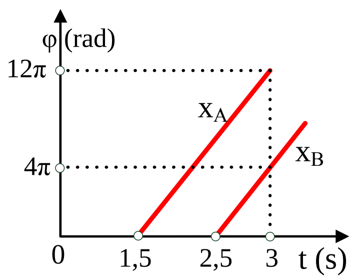
Η χρονική στιγμή t_A = 1,5 s είναι η χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Α ξεκινά να ταλαντώνεται.

ii. Για το υλικό σημείο Β(x_B = 2 m) έχουμε: $\varphi_B = 8\pi t - 2{,}5\pi x_B \Rightarrow$ $\boldsymbol{\varphi_B = 8\pi t - 20\pi}$ **(S.I.)**

Όμοια πρέπει: $\varphi_B \geq 0 \Rightarrow 8\pi t_B - 20\pi \geq 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{t_B \geq 2{,}5}$ **s**

Η χρονική στιγμή t_B = 0,8 s είναι η χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Β ξεκινά να ταλαντώνεται.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



4. Αρμονικό κύμα διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο στη διεύθυνση του άξονα x′Ox με ταχύτητα 0,5 m/s και τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα μέτρου π m/s. Δύο υλικά σημεία $K(x_K = 10\text{ cm})$ και $\Lambda(x_\Lambda = 12{,}5\text{ cm})$ του ελαστικού μέσου έχουν μια χρονική στιγμή φάση $\varphi_K = \dfrac{3\pi}{2}$ rad και $\varphi_\Lambda = \dfrac{7\pi}{4}$ rad αντίστοιχα.

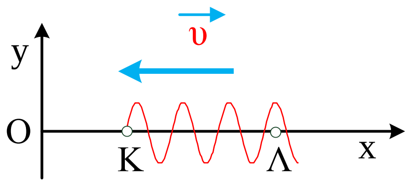
α. Να βρείτε τη φορά διάδοσης του αρμονικού κύματος και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση του.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης του υλικού σημείου $M(x_M = -3\text{ m})$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α. Καθώς το κύμα διαδίδεται και διεγείρει διαδοχικά τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου, τα υλικά σημεία που ξεκινούν πρώτα να ταλαντώνονται έχουν κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη φάση από τα σημεία που ξεκινούν πιο μετά. Είναι: $\varphi_K = \dfrac{6\pi}{4}$ rad και $\varphi_\Lambda = \dfrac{7\pi}{4}$ rad



Αφού $\varphi_\Lambda > \varphi_K$ την ίδια στιγμή, το κύμα διαδίδεται από το σημείο Λ προς το σημείο Κ. Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, επειδή το σημείο Λ απέχει μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή O(x = 0) του άξονα σε σχέση με το σημείο Κ, το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x′Ox. Για τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ έχουμε:

$$\Delta\varphi_{\Lambda K} = \omega\Delta t_{\Lambda K} \Rightarrow \Delta\varphi_{\Lambda K} = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{\Lambda K} = \frac{2\pi d}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi d}{\Delta\varphi_{\Lambda K}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\cdot 2{,}5}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \mathbf{\lambda = 20\,cm \Rightarrow \lambda = 0{,}2\,m}$$

Επίσης: $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \dfrac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}4\,s}$ και η κυκλική συχνότητα $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \mathbf{\omega = 5\pi\,\dfrac{rad}{s}}$.

Αφού το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με θετική ταχύτητα και το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα, η ζητούμενη εξίσωση του αρμονικού κύματος θα έχει τη μορφή: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $\upsilon_{max} = \pi$ m/s. Είναι: $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow$ $\mathbf{A = 0,2\,m}$

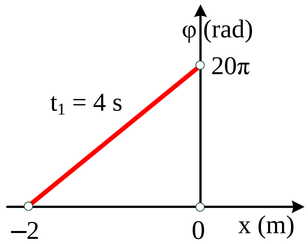
Η εξίσωση του κύματος είναι η: $y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,4}+\frac{x}{0,2}\right) \Rightarrow$ $\mathbf{y = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5t+5x)\ \ (S.I.)}$

β. Η εξίσωση της φάσης του κύματος είναι η: $\varphi = 5\pi t + 10\pi x$ (S.I.)

Για $t = t_1 = 4$ s έχουμε: $\boldsymbol{\varphi = 20\pi + 10\pi x}$ **(S.I.)**

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε x για το οποίο προκύπτει $\varphi \geq 0$.

Είναι: $20\pi + 10\pi x \geq 0 \Rightarrow$ $\mathbf{x \geq -2\ m}$



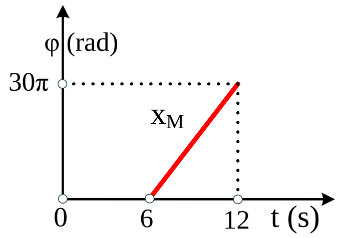
Για x = 0 είναι $\varphi_{(0)} = 20\pi$ rad. Η γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. Στην εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 5\pi t + 10\pi x$ (S.I.) θέτουμε όπου $x = x_M = -3$m:

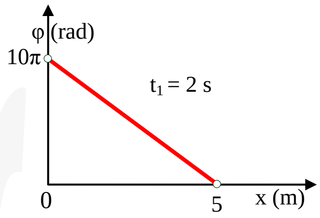
$\varphi_M = 5\pi t - 30\pi$ (S.I.)

Η εξίσωση αυτή ισχύει για όλες τις χρονικές στιγμές οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $\varphi_M \geq 0$.Έχουμε: $\varphi_M \geq 0 \Rightarrow 5\pi t_M - 30\pi \geq 0 \Rightarrow t_M \geq 6$ s

Η χρονική στιγμή $t_M = 6$ s είναι η στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο M. Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



5. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 0,2 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Η ταλάντωση του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα έχει μηδενική αρχική φάση. Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται γραφικά η φάση του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x μια χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.



α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος,

β. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s.

γ. Να βρείτε την τετμημένη ενός σημείου Ζ του ελαστικού μέσου, αν γνωρίζετε ότι το σημείο αυτό ξεκίνησε να ταλαντώνεται πριν το σημείο Θ($x_\Theta = 8$ m) και η ταλάντωση του εμφανίζει με την ταλάντωση του σημείου Ζ διαφορά φάσης $\frac{5\pi}{4}$ rad.

Λύση

α. Αφού το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και η ταλάντωση του υλικού σημείου Ο(x = 0) έχει μηδενική αρχική φάση, η εξίσωση της φάσης του κύματος έχει τη μορφή: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Από τη γραφική παράσταση της εκφώνησης για x = 0 και $t = t_1 = 2$ s έχουμε φ = 10π rad. Συνεπώς:

$$10\pi = 2\pi\frac{2}{T} \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\,s}$$

Επίσης από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι για x = 5 m και $t = t_1 = 2$ s η φάση ισούται με μηδέν.

Άρα: $0 = 2\pi\left(\frac{2}{0,4} - \frac{5}{\lambda}\right) \Rightarrow \mathbf{\lambda = 1\,m}$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι η:

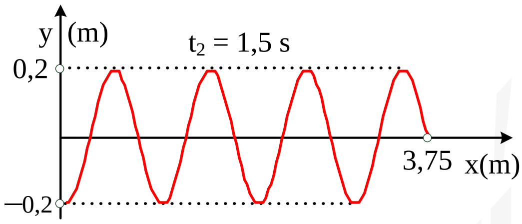
$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,4} - \frac{x}{1}\right) \Rightarrow \mathbf{y = 0,2\eta\mu 2\pi(2,5t - x)\ \ (S.I.)}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s είναι: y = 0,2ημ(5π·3 – 2πx) (S.I.) ⇒ **y = 0,2ημ(15π – 2πx) (S.I.)**

Για να βρούμε πόσο διαδόθηκε το κύμα την χρονική στιγμή $t_2 = 1,5$ s μπορούμε να μηδενίσουμε την φάση.

$\varphi = 0 \Rightarrow 7,5\pi - 2\pi x = 0 \Rightarrow x = 3,75$ m

Χωρίζουμε σε $N = \frac{2x}{\lambda} = \frac{7,5}{1} \Rightarrow N = 7,5$ τμήματα.



γ. Για τη διαφορά φάσης των δύο υλικών σημείων έχουμε:

$$\Delta\varphi_{Z\Theta} = \omega \Delta t_{Z\Theta} \Rightarrow \Delta\varphi_{Z\Theta} = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{Z\Theta} = \frac{2\pi d}{\lambda} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi d}{1} \Rightarrow \mathbf{d = \frac{5}{8} m}$$

Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και το υλικό σημείο Ζ είχε ξεκινήσει να ταλαντώνεται πριν από το υλικό σημείο Θ. Συνεπώς $x_Z < x_\Theta$. Έχουμε: $d = x_\Theta - x_Z \Rightarrow \frac{5}{8} = 8 - x_Z \Rightarrow \mathbf{x_Z = \frac{59}{8} m}$.

6. Πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στην αρχή Ο του θετικού ημιάξονα Οx και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωσης $y_O = 0{,}5ημ20πt$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργεί η πηγή αυτή διαδίδονται με ταχύτητα 4 m/s σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Οx.

α. Να υπολογίσετε πόσα υλικά σημεία στα οποία έχει φτάσει το κύμα έχουν τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}3$ s την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με την πηγή.

β. Δύο υλικά σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου έχουν την ίδια χρονική στιγμή αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες απομακρύνσεις. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των σημείων Α και Β.

Λύση

α. 1^{ος} τρόπος: (με τη βοήθεια τον στιγμιότυπου)

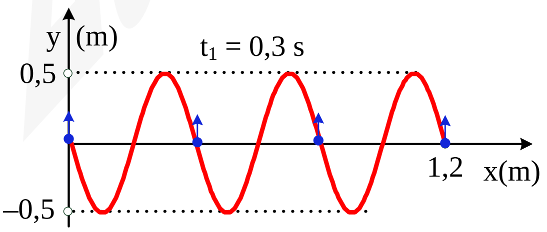
Βρίσκουμε την απομάκρυνση του υλικού σημείου Ο(x = 0) τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}3$ s:

$y_O = 0{,}5ημ6π \Rightarrow y_O = 0$

Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα και ξεκινά τη διάδοση του τη χρονική στιγμή t = 0, εξαναγκάζοντας το υλικό σημείο Ο(x = 0) να ξεκινήσει την ταλάντωση του με $υ > 0$. Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει διαδοθεί κατά d πέρα από το Ο. Είναι: $υ = \frac{d}{t_1} \Rightarrow \mathbf{d = 1{,}2\,m}$

Έχουμε ω = 20π rad/s ⇒ T = 0,1 s. Επίσης: $υ = \frac{λ}{T} \Rightarrow \mathbf{λ = 0{,}4\,m}$

Είναι $N = \frac{2d}{λ} = \frac{2{,}4}{0{,}4} \Rightarrow \mathbf{N = 6}$



Το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_1 φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι ο αριθμός των υλικών σημείων που τη χρονική στιγμή t_1 έχουν την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με την πηγή είναι 4.

2ος τρόπος: (με τη βοήθεια της εξίσωσης ταλάντωσης) Είναι: $y_Q = Αημφ_0$ και $υ_O = υ_{max}συνφ_0$

Ένα υλικό σημείο Κ του ελαστικού μέσου έχει κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο Ο όταν τα δύο υλικά σημεία απέχουν μεταξύ τους απόσταση που είναι πολλαπλάσια του μήκους κύματος.

Όμως τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει φτάσει σε απόσταση 1,2 m μακριά από το Ο(x = 0). Άρα:

$0 < d \le 1{,}2\ m \Rightarrow 0 < κ \cdot 0{,}4 \le 1{,}2 \Rightarrow 0 < κ \le 3$ με $κ = 0,1,2,...$

Επομένως τη χρονική στιγμή t_1, 3 σημεία έχουν την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με την πηγή Ο(x = 0).

β. Για να έχουμε συνεχώς αντίθετη ταχύτητα και αντίθετη απομάκρυνση θα πρέπει τα δύο σημεία να βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, άρα:

$$d = (2κ+1)\frac{λ}{2} \overset{κ=0}{\Rightarrow} d = \frac{λ}{2} \Rightarrow \mathbf{d = 0,2m}$$

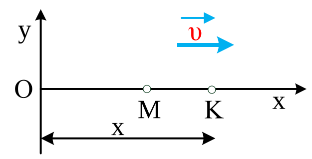
7. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδεται με ταχύτητα 0,8 m/s προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα αρμονικό κύμα. Υλικό σημείο Μ(x_M = 0,6 m) του ελαστικού μέσου ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 με θετική ταχύτητα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του y_M = 0,4ημ(4πt – 3π) (S.I.) για $t \geq t_1$.

α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β. Να υπολογίσετε τη φάση της ταλάντωσης του υλικού σημείου Μ τη χρονική στιγμή $4t_1$.

γ. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των υλικών σημείων Μ και Ν(x_N = 0,9 m) μια χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με υ > 0.

Λύση



α. Η εξίσωση του κύματος είναι η χρονική εξίσωση ταλάντωσης ενός τυχαίου σημείου του ελαστικού μέσου που έχει τετμημένη x. Έστω ένα τυχαίο σημείο Κ με τετμημένη x. Η ταλάντωση του τυχαίου αυτού σημείου θα εμφανίζει διαφορά φάσης Δφ με την ταλάντωση του σημείου Μ η οποία προηγείται (μιας και το σημείο Μ είχε ξεκινήσει πριν από το σημείο Κ). Αφού είναι y_M = 0,4ημ(4πt – 3π) (S.I.), για το τυχαίο σημείο Κ είναι: y = 0,4ημ(4πt – 3π –Δφ) (1) όπου Δφ η διαφορά φάσης μεταξύ Μ και Κ. Είναι:

$$\Delta\varphi_{MK} = \omega\Delta t_{MK} \Rightarrow \Delta\varphi_{MK} = \frac{2\pi}{T}\frac{x - x_M}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{MK} = \frac{2\pi(x - x_M)}{\lambda}$$

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \mathbf{T = 0,5\,s}$ και $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon \cdot T \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,4\,m}$.

Συνεπώς: $\Delta\varphi_{MK} = \frac{2\pi(x - 0,6)}{0,4} \Rightarrow \Delta\varphi_{MK} = 5\pi x - 3\pi$ (S.I.)

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει: **y = 0,4ημ(4πt – 5πx) (S.I.)**

β. Για να βρούμε τη χρονική στιγμή t_1 που ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Μ(x_M = 0,6 m), μηδενίζουμε τη φάση του κύματος για x = x_M = 0,6 m. Έχουμε: $4\pi t_1 - 5\pi x_M = 0 \Rightarrow t_1 = 0,75$ s

Άρα $t_2 = 4t_1 = 3$ s. Συνεπώς η ζητούμενη φάση είναι: $\varphi_M = 4\pi t_2 - 5\pi x_M \Rightarrow$ **φ_M = 9π rad**.

γ. Βρίσκουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο υλικών σημείων Μ και Ν. Είναι:

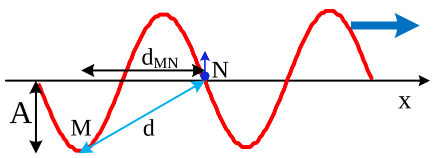
$$\Delta\varphi_{MN} = \omega\Delta t_{MN} \Rightarrow \Delta\varphi_{MN} = \frac{2\pi}{T}\frac{d_{MN}}{\upsilon} \Rightarrow \Delta\varphi_{MN} = \frac{2\pi d_{MN}}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi_{MN} = \frac{2\pi\cdot 0,3}{0,4} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi_{MN} = \frac{3\pi}{2}\,\text{rad}}$$

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και είναι $x_\Delta > x_M$, προκύπτει ότι για κάθε χρονική στιγμή είναι $\varphi_M > \varphi_N$. Άρα: $\Delta\varphi_{MN} = \varphi_M - \varphi_N \Rightarrow \varphi_M = \varphi_N + \frac{3\pi}{2}$ rad .

Το υλικό σημείο Ν διέρχεται από τη Θ.Ι. του με $\upsilon > 0$. Αφού είναι $y_N = A\eta\mu\varphi_N = 0$ με $\upsilon > 0$, θα ισχύει ότι $\varphi_N = 2\kappa\pi$ rad με κ = 0, 1, 2,.... Άρα: $\varphi_M = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$rad   με κ =1,2,...

Συνεπώς για την ίδια χρονική στιγμή: $y_M = A\eta\mu\varphi_M = A\eta\mu(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow y_M = -A$

Δηλαδή τη στιγμή που το υλικό σημείο Ν διέρχεται από τη Θ.Ι. του με $\upsilon > 0$ το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση. Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας των υλικών σημείων Μ και Ν είναι $d_{MN} = 0,3$ m = 3λ/4. Το στιγμιότυπο μια χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Ν διέρχεται από τη Θ.Ι. του με $\upsilon > 0$ και το υλικό σημείο Μ βρίσκεται στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ζητούμενη απόσταση των δύο υλικών σημείων είναι:



$$d = \sqrt{d_{M\Delta}^2 + A^2} \Rightarrow d = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} \Rightarrow d = 0,5\,\text{m}$$

Παρατήρηση: Η απόσταση μεταξύ των δύο υλικών σημείων Μ και Ν μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή μπορεί να βρεθεί και από τη σχέση $d = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.