ΚΥΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γραφικές παραστάσεις της εξίσωσης του κύματος

1. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x′Ox με ταχύτητα 0,8 m/s. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή μέτρησης των αποστάσεων O(x = 0) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του είναι η $y = 0{,}2ημ4πt$ (S.I.).

α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος, στο θετικό ημιάξονα Ox, τη χρονική στιγμή $t_1 = 1{,}25$ s και $t_2 = 1{,}875$ s.

γ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του υλικού σημείου $K(x_K = 0{,}4\ m)$ του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη Θ.Ι. για το υλικό σημείο O(x = 0) είναι της μορφής y = Αημωt, όπου Α = 0,2 m και ω = 4π rad/s. Επιπλέον το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα.

Έχουμε $ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow \mathbf{T = 0{,}5\,s}$ και $f = \frac{1}{T} \Rightarrow \mathbf{f = 2\,Hz}$ επίσης $υ = λf \Rightarrow \mathbf{λ = 0{,}4\ m}$. Άρα η εξίσωση του κύματος είναι η: $y = 0{,}2ημ2π\left(\frac{t}{0{,}5} - \frac{x}{0{,}4}\right) \Rightarrow \mathbf{y = 0{,}2ημ2π(2t - 2{,}5x)}$ (S.I.)

β. Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x,t_1)$ που προκύπτει αν θέσουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $t = t_1$. Για $t_1 = 1{,}25$ s είναι:

$y_1 = 0{,}2ημ(4πt_1 - 5πx) \Rightarrow \mathbf{y_1 = 0{,}2ημ(5π - 5πx)}$ **(S.I.)**

Βρίσκουμε πόσο μακριά έχει φτάσει το κύμα από την αρχή O(x = 0) τη χρονική στιγμή t_1. Είναι:

$$υ = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow x_1 = υ \cdot t_1 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 1\,m}$$

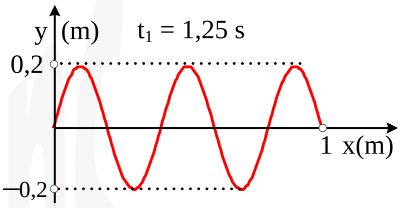
Βρίσκουμε πόσα "μισά" μήκη κύματος έχουμε (όρη και κοιλάδες μαζί).

$$N = \frac{x_1}{λ/2} \Rightarrow N = \frac{1}{0{,}2} \Rightarrow \mathbf{N = 5}$$

Επομένως πρέπει να φτιάξουμε για το θετικό ημιάξονα Ox τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y_1 = 0{,}2ημ(5π – 5πx)$ για $0 \leq x \leq 1$ m

Σχεδιάζουμε 5 ίσα χωρίσματα στον ημιάξονα Ox και ξεκινάμε από το τέλος κάνοντας ένα όρος και συνεχίζουμε ημιτονοειδώς προς τα πίσω. Το στιγμιότυπο φαίνεται στο σχήμα.



Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για την δεύτερη χρονική στιγμή και έχουμε:

Για $t_2 = 1{,}875$ s είναι: $y_2 = 0{,}2ημ(4πt_2 – 5πx) \Rightarrow$ $\mathbf{y_2 = 0{,}2ημ(7{,}5π – 5πx)}$ **(S.I.)**

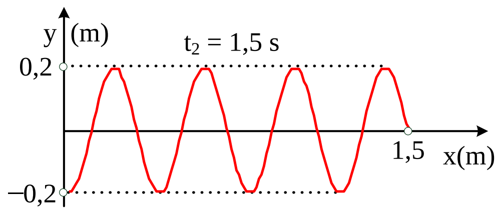
Βρίσκουμε πόσο μακριά έχει φτάσει το κύμα από την αρχή O(x = 0) τη χρονική στιγμή t_1. Είναι:

Βρίσκουμε πόσα "μισά" μήκη κύματος έχουμε (όρη και κοιλάδες μαζί). $N = \dfrac{x_2}{λ/2} \Rightarrow N = \dfrac{1{,}5}{0{,}2} \Rightarrow \mathbf{N = 7{,}5}$

Επομένως πρέπει να φτιάξουμε για το θετικό ημιάξονα Ox τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$y_2 = 0{,}2ημ(7{,}5π – 5πx)$ για $0 \leq x \leq 1{,}5$ m

Θα πρέπει πρώτα να χωρίσουμε τον άξονα σε 7,5 τμήματα. Πρώτα κάνουμε το μισό τμήμα και μετά τα ολόκληρα και προκύπτει το διπλανό σχήμα (όπου πάλι ξεκινάμε από μπρος προς τα πίσω). Επειδή έχουμε μισό όρος ή μισή κοιλάδα το στιγμιότυπο θα καταλήγει σε κάποιο άκρο στη θέση της πηγής (±A).



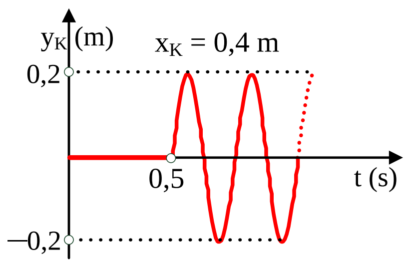
γ. Για να βρούμε τη χρονική στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο K χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$υ = \frac{x_K}{t_K} \Rightarrow t_K = \frac{x_K}{υ} \Rightarrow \mathbf{t_K = 0{,}5\,s}$$

Για να βρούμε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του υλικού σημείου K, θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $x_K = 0{,}4$ m.

Είναι: $y_K = 0{,}2ημ(4πt – 5πx_K) \Rightarrow$ $\mathbf{y_K = 0{,}2ημ(4πt – 2π)}$ **(S.I.)** για $\mathbf{t \geq 0{,}5}$ **s**

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



2. Σε χορδή μεγάλου μήκους που ταυτίζεται με τον οριζόντιο ημιάξονα Οx διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με εξίσωση $y = 20ημ2π(t - 5\cdot 10^{-2}x)$ (y, x σε cm και t σε s).

α. Να βρείτε την οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας κοιλάδας και του μεθεπόμενου όρους,

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5$ s σε βαθμολογημένους άξονες και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που τη χρονική στιγμή t_1 η απόσταση από τη θέση ισορροπίας τους ισούται με 10 cm.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο $K(x_K = 40$ cm$)$ του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο, αν η μάζα του υλικού σημείου ισούται με 0,2 g, και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

Θεωρήστε για τις πράξεις: $π^2 = 10$.

Λύση

α. Η οριζόντια απόσταση μεταξύ μιας κοιλάδας και του μεθεπόμενού όρους ισούται με $d = \frac{3λ}{2}$. Η εξίσωση του κύματος είναι η: $y = 20ημ2π(t - 5\cdot 10^{-2}x)$ (y, x σε cm και t σε s)

Από τη σύγκριση της εξίσωσης αυτής με τη γενική μορφή $y = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$ προκύπτει ότι: **A = 20** cm ή

$A = 0,2$ m, **T = 1 s** και $λ = \frac{1}{5\cdot 10^{-2}}$ cm $\Rightarrow$ **λ = 20 cm**.

Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με: **d = 0,3 m**.

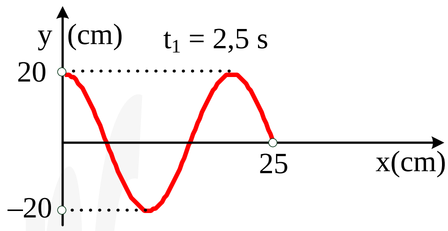
β. Η εξίσωση $y = f(t, x)$ για $t_1 = 2,5$ s γίνεται: $y = 20ημ(2,5π - 0,1πx)$ (y, x σε cm και t σε s)

Βρίσκουμε πόσο μακριά από το σημείο $O(x = 0)$ έχει διαδοθεί το κύμα τη χρονική στιγμή t_1

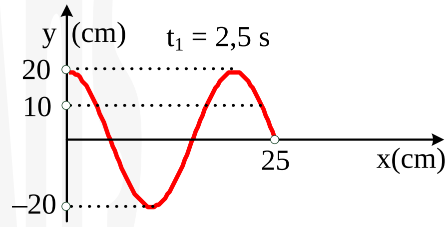
Είναι: $φ = 0 \Rightarrow$ **x = 25 cm**

Χωρίζω το παραπάνω τμήμα σε λ/2 $\quad N = \frac{x}{λ/2} = \frac{2x}{λ} \Rightarrow N = \frac{50}{20} \Rightarrow N = 2,5$

Από το αποτέλεσμα που προέκυψε ξέρω ότι γυρίζοντας από το τέλος προς τα πίσω θα καταλήξω στο ±Α.



Επίσης αρχίζω να χωρίζω την παραπάνω απόσταση ξεκινώντας πρώτα από το μισό και μετά τα υπόλοιπα 2 τμήματα.



Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα ο αριθμός των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που τη χρονική στιγμή t_1 έχουν απομάκρυνση + 10 cm ισούται με: **N = 3**

γ. Κάθε υλικό σημείο του ελαστικού μέσου θεωρείται ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη στιγμή που έχει ξεκινήσει να ταλαντώνεται.

Συνεπώς για τη δύναμη επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο Κ έχουμε:

$\Sigma F_K = -Dy_K \Rightarrow \Sigma F_K = -m\omega^2 y_K$ (1)

Είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 2\pi\,rad/s}$ και $m = 0{,}2\ g = 2\cdot 10^{-4}\ kg$

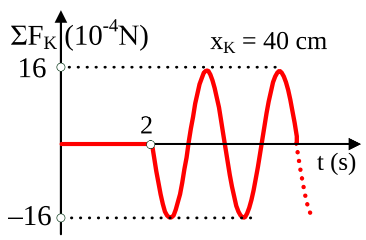
Η συνάρτηση $y_K = f(t)$ προκύπτει θέτοντας στην εξίσωση του κύματος όπου $x = x_K = 40$ cm:

$y_K = 20\eta\mu(2\pi t - 10\pi\cdot 10^{-2}x_K) \Rightarrow y_K = 20\eta\mu(2\pi t - \pi\cdot 10^{-1}\cdot 40) \Rightarrow \boldsymbol{y_K = 20\eta\mu(2\pi t - 4\pi)}$ $y \rightarrow cm$ ή

$\boldsymbol{y_K = 0{,}2\eta\mu(2\pi t - 4\pi)}$ (S.I.)

Αφού το υλικό σημείο Κ ξεκίνησε να ταλαντώνεται μετά τη χρονική στιγμή t = 0, η παραπάνω χρονική εξίσωση ισχύει για $t \geq t_K$, όπου t_κ η χρονική στιγμή που το σημείο Κ ξεκίνησε να ταλαντώνεται. Έχουμε:

$\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{20}{1} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 20\dfrac{cm}{s}}$ και $\upsilon = \dfrac{x_K}{t_K} \Rightarrow t_K = \dfrac{x_K}{\upsilon} \Rightarrow \boldsymbol{t_K = 2s}$



Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$\boldsymbol{\Sigma F_K = -16\cdot 10^{-4}\eta\mu(2\pi t - 4\pi)}$ (S.I.)

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

3. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος λ = 0,8 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα x′Ox και προς την αρνητική κατεύθυνση. Η ταχύτητα διάδοσης τού κύματος ισούται με 2 m/s και είναι ίση κατά μέτρο με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου. Τη χρονική στιγμή t = 0 το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στην αρχή O του άξονα αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

α. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

β. Να σχεδιάσετε τμήμα του στιγμιότυπου του αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 = 1,2 s για τα υλικά σημεία του μέσου διάδοσης που βρίσκονται μεταξύ του σημείου $M(x_M$ = 1,6 m) και του σημείου που αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή t_1.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του υλικού σημείου $N(x_N$ = 2 m) σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Λύση

α. Αφού το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 κινούμενο προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση και το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα, η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

Είναι: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow T = \frac{0,8}{2} \Rightarrow \mathbf{T = 0,4\,s}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 5\pi\frac{rad}{s}}$

Σύμφωνα με την εκφώνηση ισχύει ότι: $\upsilon = \upsilon_{max} \Rightarrow \upsilon = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon}{\omega} \Rightarrow \mathbf{A = \frac{2}{5\pi}\,m}$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι η: $\mathbf{y = \frac{2}{5\pi}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,4}+\frac{x}{0,8}\right)}$ (S.I.)

β. Η εξίσωση y = f(x, t) για t_1 = 4,5 s γίνεται: $y_1 = \frac{2}{5\pi}\eta\mu 2\pi\left(\frac{1,2}{0,4}+\frac{x}{0,8}\right) \Rightarrow y_1 = \frac{2}{5\pi}\eta\mu 2\pi\left(3+\frac{x}{0,8}\right) \Rightarrow$

$\mathbf{y_1 = \frac{2}{5\pi}\eta\mu(6\pi + 2,5\pi x)}$ (S.I.)

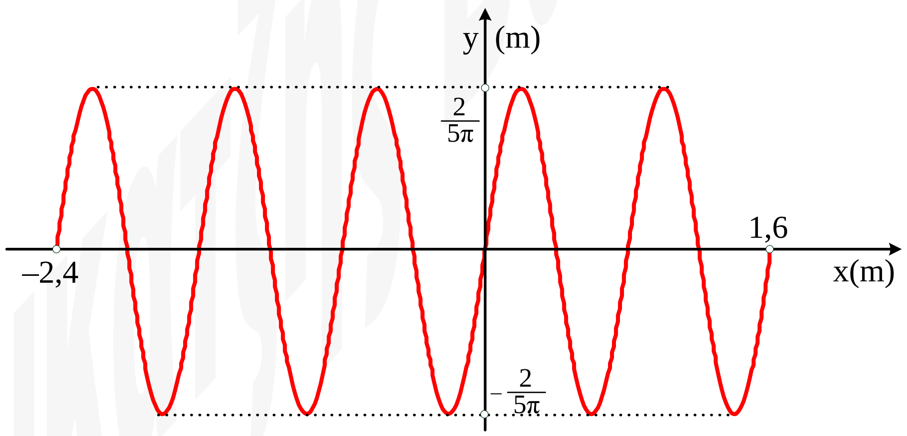
Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί κατά d πέρα από το σημείο O(x = 0), προς τον αρνητικό ημιάξονα. Ισχύει: $\upsilon = \frac{d}{t_1} \Rightarrow \mathbf{d = 2,4\,m}$.

Η απόσταση αυτή αντιστοιχεί σε $N = \frac{d}{\lambda/2} \Rightarrow \mathbf{N = 6}$ (όρη ή κοιλάδες)

Δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1 αρχίζει να ταλαντώνεται το υλικό σημείο με τετμημένη $x_1 = -2,4$ m. Η οριζόντια απόσταση των υλικών σημείων O και M(x_M = 1,6 m) ισούται με (OM) = 1,6 m = 2λ. Η απομάκρυνση του σημείου M από τη θέση ισορροπίας τους τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$y_M = \frac{2}{5\pi}\eta\mu(6\pi + 4\pi) \Rightarrow y_M = \frac{2}{5\pi}\eta\mu(10\pi) \Rightarrow \mathbf{y_M = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο σχήμα.

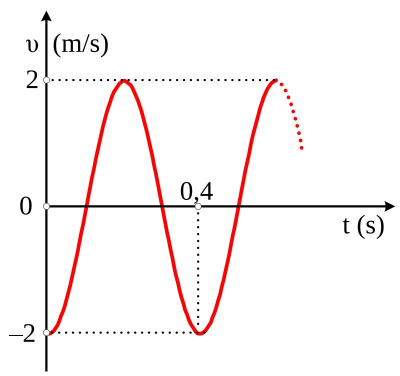


γ. Από την εξίσωση του κύματος, θέτοντας όπου x_N = 2 m έχουμε: $y_N = \frac{2}{5\pi}\eta\mu(2\pi t + 2,5\pi x_K) \Rightarrow$

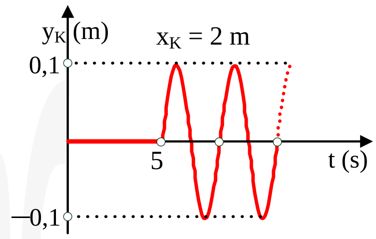
$\mathbf{y_N = \frac{2}{5\pi}\eta\mu(5\pi t + 5\pi)}$ (S.I.) για $t \geq 0$

Άρα για την ταχύτητα έχουμε: $\mathbf{\upsilon_N = 2\sigma\upsilon\nu(5\pi t + 5\pi)}$ (S.I.) για $t \geq 0$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



4. Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του υλικού σημείου που βρίσκεται στην αρχή O του άξονα είναι της μορφής y = Αημωt. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Κ (x_K = 2 m) της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο.



α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση ενός υλικού σημείου Λ της χορδής τη στιγμή $t_1 = \frac{53}{12}$ s, αν γνωρίζετε ότι το σημείο Λ ξεκίνησε να ταλαντώνεται 1 s νωρίτερα από τη χρονική στιγμή που άρχισε την ταλάντωση του το σημείο Κ.

Λύση

α. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το υλικό σημείο Κ της χορδής ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_K = 2 s (χρόνος άφιξης του κύματος). Επειδή x_K = 2 m, έχουμε: $\upsilon = \frac{x_K}{t_K} = \frac{2}{5} \Rightarrow \mathbf{\upsilon = 0,4\frac{m}{s}}$

Επιπλέον, από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι στη χρονική διάρκεια 5 s → 7 s το υλικό σημείο Κ έχει εκτελέσει 2 ταλαντώσεις, άρα $\Delta t = 2T \Rightarrow 2\ s = 2T \Rightarrow \mathbf{T = 1\ s}$

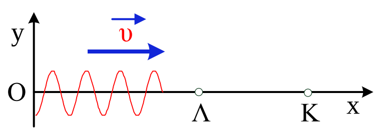
Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $\lambda = \upsilon \cdot T \Rightarrow \mathbf{\lambda = 0,4\ m}$

β. Αφού το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα και το υλικό σημείο O(x = 0) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση y = Αημωt, η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι Α = 0,1 m άρα η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{0,4}\right) \Rightarrow \mathbf{y = 0,1\eta\mu 2\pi(t - 2,5x)\quad (S.I.)}$$

γ. Το σημείο Λ ξεκίνησε να ταλαντώνεται πριν από το σημείο Κ. Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα, το σημείο Λ βρίσκεται πιο



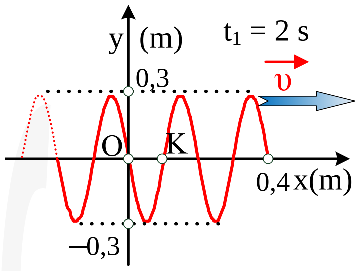
κοντά στο Ο(x = 0) από το σημείο Κ. Η χρονική διαφορά έναρξης των δύο ταλαντώσεων ισούται με το χρόνο που χρειάζεται το κύμα για να διαδοθεί από το ένα σημείο στο άλλο. Είναι:

$$\upsilon = \frac{\Delta x_{K\Lambda}}{\Delta t_{K\Lambda}} \Rightarrow x_K - x_\Lambda = \upsilon \cdot \Delta t_{K\Lambda} \Rightarrow 2 - x_\Lambda = 0,4 \Rightarrow \mathbf{x_\Lambda = 1,6m}$$

Άρα για τη ζητούμενη απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{53}{12}s$ έχουμε: $y_{\Lambda(t_1)} = 0,1\eta\mu 2\pi(\frac{53}{12} - \frac{1,6}{0,4}) \Rightarrow$

$$y_{\Lambda(t_1)} = 0,1\eta\mu 2\pi(\frac{53}{12} - \frac{48}{12}) \Rightarrow y_{\Lambda(t_1)} = 0,1\eta\mu 2\pi(\frac{5}{12}) \Rightarrow y_{\Lambda(t_1)} = 0,1\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \mathbf{y_{\Lambda(t_1)} = 0,05m}$$

5. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός γραμμικού αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s. Το κύμα αυτό διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x'x, προς τη θετική φορά του άξονα. Το υλικό σημείο O(x = 0) αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 κινούμενο προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση,



α. Να υπολογίσετε την περίοδο του κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Να βρείτε την κατεύθυνση της κίνησης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή που απεικονίζεται στο στιγμιότυπο,

δ. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \dfrac{3T}{4}$

Λύση

α. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι Α = 0,3 m. Επίσης προκύπτει ότι το υλικό σημείο Μ του μέσου διάδοσης που ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s έχει τετμημένη x_M = 0,4 m.

Είναι: $\upsilon = \dfrac{x_M}{t_1} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{0,4}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 0,2\dfrac{m}{s}}$

Επίσης, από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι: $(OM) = 2\lambda \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,2\,m}$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \dfrac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow T = \dfrac{0,2}{0,2} \Rightarrow \boldsymbol{T = 1\,s}$

ή θα μπορούσαμε να πούμε ότι εφόσον έχουμε διάδοση κατά 2λ η χρονική στιγμή t_1 αντιστοιχεί σε 2T άρα $t_1 = 2T \Rightarrow 2\text{ s} = 2T \Rightarrow$ **T = 1 s**

β. Αφού το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα και το υλικό σημείο O(x = 0) ξεκινά την ταλάντωση του τη χρονική στιγμή t = 0 με υ > 0, η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι η:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{0,2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{y = 0,3\eta\mu 2\pi\ \ t - 5x \quad (S.I.)}$$

γ. Η φορά κίνησης του υλικού σημείου $K(x_K = 0,1$ m) τη χρονική στιγμή t_1 μπορεί να βρεθεί είτε με τη βοήθεια της χρονικής εξίσωσης της ταχύτητας της ταλάντωσης είτε με τη βοήθεια του στιγμιότυπου.

1ος τρόπος: (με τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης)

Για το υλικό σημείο Κ έχουμε: $y_K = 0{,}3ημ2π(t – 5x_K) \Rightarrow$ **$y_K = 0{,}3ημ(2πt – π)$ (S.I.)**

Άρα η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου αυτού είναι η:

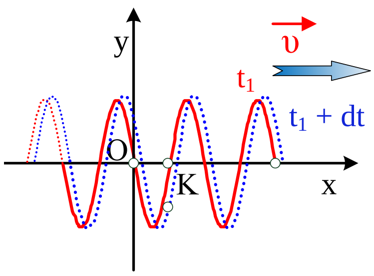
$υ_K = 0{,}6π·συν(2πt – π)$ (S.I.)

Τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s είναι: $υ_K = 0{,}6π·συν3π \Rightarrow$ **$υ_K = –0{,}6π$ m/s**

Αφού η ταχύτητα του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 είναι αρνητική, το υλικό σημείο Κ τη χρονική αυτή στιγμή κινείται με φορά προς τα κάτω.

2ος τρόπος: (με τη βοήθεια του στιγμιότυπου)

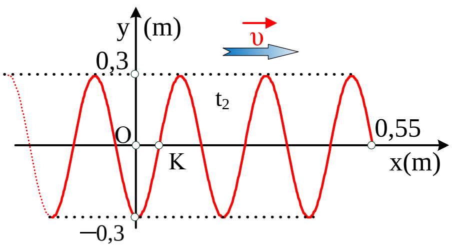
Αφού γνωρίζουμε τη φορά διάδοσης του κύματος, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα νέο στιγμιότυπο μια χρονική στιγμή t_1 + dt στο ίδιο διάγραμμα. Από το νέο αυτό στιγμιότυπο (διακεκομμένες) προκύπτει ότι το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 + dt βρίσκεται σε μια θέση y πιο κάτω από αυτή όπου βρισκόταν τη χρονική στιγμή t_1. Συνεπώς το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 κινείται με φορά προς τα κάτω.



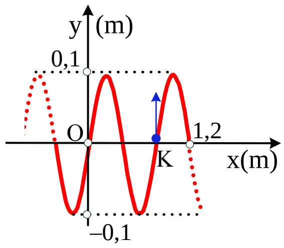
3ος τρόπος: (με τη βοήθεια του στιγμιότυπου) Αφού το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, η κοιλάδα που βρίσκεται αριστερά του Κ προχωρεί κι αυτή προς τα δεξιά, οπότε μετά από λίγο φτάνει στο σημείο Κ, με αποτέλεσμα το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου να βρεθεί στην κάτω ακραία θέση. Αυτό σημαίνει ότι το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 κινείται προς τα κάτω.

δ. Την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{3T}{4} = 2{,}75$ s το κύμα θα έχει διαδοθεί προς τη θετική φορά του άξονα κατά d $= υt_2 = 0{,}55$ m. Συνεπώς τη χρονική στιγμή t_2 ξεκινά να ταλαντώνεται το υλικό σημείο Λ με τετμημένη $x_Λ = 0{,}55$ m. Η απόσταση που έχει διαδοθεί το κύμα μετά το σημείο Ο αντιστοιχεί σε $N = \frac{2d}{λ} \Rightarrow N = \frac{2 \cdot 0{,}55}{0{,}2} \Rightarrow$ **$N = 5{,}5$** (όρη ή κοιλάδες)

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα



6. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x′Ox διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας f = 5 Hz. Το υλικό σημείο Ο που βρίσκεται στην αρχή μέτρησης των αποστάσεων αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 κινούμενο προς τη μέγιστη θετική του απομάκρυνση. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται ένα τμήμα του στιγμιότυπου του αρμονικού κύματος μια χρονική στιγμή που το σημείο Κ του ελαστικού μέσου διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με φορά προς τα πάνω.



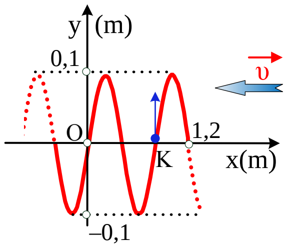
α. Να προσδιορίσετε τη φορά διάδοσης του αρμονικού κύματος.

β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού σημείου $Λ(x_Λ = –0,4$ m) μετά τη στιγμή που ξεκίνησε να ταλαντώνεται και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του υλικού αυτού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες.

γ. Την χρονική στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Λ που βρίσκεται το σημείο Κ.

Λύση

α. Το υλικό σημείο Κ διέρχεται από τη Θ.Ι. του με υ > 0. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει το σημείο που άρχισε την ταλάντωση πριν από αυτό να είναι κοιλάδα αφού σε Τ/4 θα βρίσκεται το σημείο Κ σε κοιλάδα (αφού έχει υ > 0). Βλέπουμε ότι από το δοθέν στιγμιότυπο κοιλάδα υπάρχει δεξιά του Κ, άρα το κύμα κατευθύνεται από τα δεξιά προς τα αριστερά.



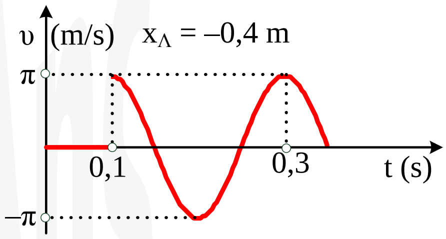
β. Από το σχήμα προκύπτει ότι $\frac{3\lambda}{2} = 1,2\,\text{m} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,8\,m}$ και **A = 0,1 m**.

Η εξίσωση του κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \boldsymbol{y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{x}{0,8}\right)}$ **(S.I.)**

Για το υλικό σημείο $Λ(x_Λ = –0,4$ m) είναι: $y_Λ = 0,1\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{-0,4}{0,8}\right) \Rightarrow \boldsymbol{y_Λ = 0,1\eta\mu(10\pi t - \pi)}$ **(S.I.)**

Άρα η εξίσωση της ταχύτητας είναι $\boldsymbol{υ_Λ = \pi \cdot συν(10\pi t - \pi)}$ **(S.I.)**

Το σημείο Λ βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα όπου το κύμα φτάνει εκεί μετά την χρονική στιγμή t = 0, (σύμφωνα με την εκφώνηση το κύμα την t = 0 έχει φτάσει στο σημείο Ο (έχει καλύψει όλον το θετικό ημιάξονα)), η εξίσωση αυτή δηλαδή ισχύει για $t > t_Λ$.



Είναι: $υ = λf \Rightarrow$ **$υ = 4$ m/s** και $υ = \frac{|x_Λ|}{t_Λ} \Rightarrow t_Λ = \frac{|x_Λ|}{υ} \Rightarrow$ **$t_Λ = 0,1s$**

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. Η περίοδος του κύματος είναι $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{5} \Rightarrow$ **$T = 0,2s$**

Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή $t_Λ = 0,1s \Rightarrow t_Λ = \frac{T}{2}$ Δηλαδή το σημείο Κ έχει κάνει μισή ταλάντωση, οπότε θα βρίσκεται ξανά στη θέση ισορροπίας του αλλά με αντίθετη κατεύθυνση κίνησης ($υ_K < 0$).