Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

1. Πηγή αρμονικών κυμάτων βρίσκεται στο αριστερό άκρο Ο γραμμικού ελαστικού μέσου που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα Ox και δημιουργεί εγκάρσια αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του ελαστικού μέσου με ταχύτητα 2 m/s. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της πηγής από τη θέση ισορροπίας της είναι η $y = 0{,}4ημ8πt$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Ποια χρονική στιγμή ξεκινά να ταλαντώνεται το σημείο Μ με $x_M = \frac{19}{16}$ m

δ. Να βρείτε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σημείου Μ του ελαστικού μέσου με $x_M = \frac{19}{16}$ m τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{5}{8}s$.

Λύση

α. Από τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της πηγής από τη θέση ισορροπίας της προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης της ισούται με A = 0,4 m, ενώ η γωνιακή της συχνότητα ισούται με ω = 8π rad/s. Άρα η συχνότητα ταλάντωσης της πηγής είναι: $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 4\,Hz$

Δηλαδή η συχνότητα του κύματος είναι f = 4 Hz.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0{,}5\,m}$

β. Αφού η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του σημείου O(x = 0) είναι της μορφής y = Αημωt και το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα, η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής: $y = Aημ2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Για την περίοδο T του κύματος έχουμε: $T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0{,}25\,s$

Επίσης γνωρίζουμε ότι A = 0,4 m και λ = 0,5 m. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση του κύματος είναι:

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

$y=0,4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,25}-\frac{x}{0,5}\right)$ (S.I.) ή $\mathbf{y = 0,4\eta\mu 2\pi(4t-2x)}$ **(S.I.)**

γ. Για να βρούμε πότε ξεκινά να ταλαντώνεται ένα σημείο μπορούμε να θέσουμε την φάση ίση με μηδέν

$$\varphi=0\Rightarrow 2\pi(4t-2x_M)=0\Rightarrow 4t-2\frac{19}{16}=0\Rightarrow \mathbf{t=\frac{19}{32}s}$$

δ. Τη ζητούμενη απομάκρυνση θα τη βρούμε αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος όπου $t = t_1$ και όπου $x = x_M$. Έχουμε: $y_M=0,4\eta\mu 2\pi(4\cdot\frac{5}{8}-2\cdot\frac{19}{16})\Rightarrow y_M=0,4\eta\mu 2\pi\cdot\frac{1}{8}\Rightarrow \mathbf{y_M=0,2\sqrt{2}\,m}$

2. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα έχει εξίσωση της μορφής $y = 0{,}2ημπ(8t - x)$ (S.I.) και διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

β. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται ένα υλικό σημείο Μ του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται στη θέση $x_M = 8$ m του άξονα x′Ox.

γ. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης $y_M = f(t)$, της ταχύτητας ταλάντωσης $υ_M = f(t)$ και της επιτάχυνσης ταλάντωσης $α_M = f(t)$ του υλικού σημείου Μ.

Δίνεται για τις πράξεις: $π^2 = 10$.

Λύση

α. Η εξίσωση του κύματος που δίνεται στην εκφώνηση είναι η:

$y = 0{,}2ημπ(8t - x) \Rightarrow y = 0{,}2ημ2π(4t - 0{,}5x)$ (S.I.)

Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με τη γενική μορφή $y = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$ προκύπτουν τα εξής:

$Α = 0{,}2$ m, $\quad 4t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = 0{,}25$ s $\quad$ και $\quad 0{,}5x = \frac{x}{λ} \Rightarrow λ = 2$ m

Για να βρούμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

Έχουμε: $υ = \frac{λ}{T} \Rightarrow υ = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow \mathbf{υ = 8\frac{m}{s}}$

β. Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος που διαδίδεται στο γραμμικό ελαστικό μέσο είναι η

$y = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$.

Αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κύμα έχει φτάσει στο σημείο $Ο(x = 0)$ χωρίς να έχει περάσει πέρα από αυτό. Το σημείο Μ θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_M όταν το κύμα θα έχει διανύσει την απόσταση (ΟΜ). Συνεπώς: $υ = \frac{(ΟΜ)}{t_M} \Rightarrow t_M = \frac{(ΟΜ)}{υ} \Rightarrow t_M = \frac{8}{8} \Rightarrow \mathbf{t_M = 1s}$

γ. Για να βρούμε τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $y = f(t)$ για το σημείο Μ, θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $x = x_M$.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Είναι: $y_M = 0{,}2ημ2π(4t – 0{,}5x_M) \Rightarrow$ **$y_K = 0{,}2ημ2π(4t – 4)$ (S.I.)** για $t \geq 1$ s

Με τη βοήθεια της $y_M = f(t)$ βρίσκουμε και τις εξισώσεις $υ_M = f(t)$ και $α_M = f(t)$. Είναι:

$υ_M = ωΑσυν(8πt – 8π) \Rightarrow$ **$υ_M = 1{,}6π·συν(8πt – 8π)$ (S.I.)** για $t \geq 1$ s

και $α_M = –ω^2Αημ(8πt – 8π) \Rightarrow$ **$α_M = –128ημ(8πt – 8π)$ (S.I.)** για $t \geq 1$ s

3. Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα x′Ox διαδίδεται με ταχύτητα 5 m/s εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς τη θετική φορά του άξονα. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) του άξονα αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με μέγιστη θετική ταχύτητα. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου Κ της χορδής από τη θέση ισορροπίας του είναι η $y_K = 0{,}2ημ(10πt – 4π)$ (S.I.) για $t \geq t_K$. Να υπολογίσετε:

α. τη μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής,

β. τη θέση x_K του υλικού σημείου Κ πάνω στον άξονα,

γ. τη χρονική στιγμή που το σημείο Κ φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση.

δ. την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου Κ τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ισούται με 0,1 m για δεύτερη φορά.

Λύση

α. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή O(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με μέγιστη θετική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής y = Αημωt. Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του υλικού σημείου O(x = 0) είναι της μορφής y = Αημωt, η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι η: $y = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \Rightarrow y = Αημ\left(\frac{2πt}{T} - \frac{2πx}{λ}\right) \Rightarrow y = Αημ\left(ωt - \frac{2πx}{λ}\right)$

Για το σημείο Κ έχουμε: $y_K = 0{,}2ημ(10πt – 4π)$ (S.I.)

Συγκρίνοντας, προκύπτουν τα εξής: Α = 0,2 m, ω = 10π rad/s, $\frac{2πx_K}{λ} = 4π \Rightarrow x_K = 2λ$

Η μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής είναι: $α_{max} = ω^2Α \Rightarrow υ_{max} = 200\ m/s^2$

β. Ισχύει $ω = 2πf \Rightarrow f = 5$ Hz και $υ = λf \Rightarrow λ = 1$ m. Συνεπώς: $x_K = 2λ \Rightarrow$ **$x_K = 2$ m**

γ. Η χρονική στιγμή της έναρξης των χρόνων θεωρείται η στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται η πηγή. Κάθε άλλο σημείο ξεκινά να ταλαντώνεται αφού φτάσει πρώτα σε αυτό το κύμα δηλαδή ισχύει γενικά

$t = t_{αφ.} + t_{ταλ.}$ όπου $t_{αφ}$ ο χρόνος άφιξης του κύματος στο συγκεκριμένο σημείο και $t_{ταλ.}$ ο χρόνος που εκτελεί ταλάντωση.

Για τον χρόνο άφιξης έχουμε $\upsilon = \frac{x_K}{t_{\alpha\varphi}} \Rightarrow t_{\alpha\varphi} = \frac{2\lambda}{\upsilon} = 2T \Rightarrow \mathbf{t_{\alpha\varphi} = 0,4 s}$

Από την στιγμή της άφιξης του κύματος για να πάμε σε ακραία θέση χρειαζόμαστε χρόνο

$t_{\tau\alpha\lambda} = \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{t_{\tau\alpha\lambda} = 0,05 s}$

Άρα λοιπόν ο ζητούμενος χρόνος είναι: $t = t_{\alpha\varphi.} + t_{\tau\alpha\lambda.} \Rightarrow$ **$t = 0,45$ s**

Το ίδιο ερώτημα μπορούσαμε να το απαντήσουμε και θέτοντας στην εξίσωση ταλάντωσης $y_K = +A$

$$y_K = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi) \Rightarrow 0,2 = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi) \Rightarrow \eta\mu(10\pi t - 4\pi) = 1 \Rightarrow 10\pi t - 4\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$20t - 8 = 4k + 1 \Rightarrow \mathbf{t = \frac{4k+9}{20} s}$ άρα για πρώτη φορά (k = 0) **$t = 0,45$ s**

δ. Αφού το υλικό σημείο Κ, από τη στιγμή που ξεκινά να ταλαντώνεται, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της ταλάντωσης του, όταν η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι $y_K = 0,1$ m, εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση. Είναι:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \pm\omega\sqrt{A^2 - y_1^2} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1 = \pm\pi\sqrt{3}\ m/s}$$

Το υλικό σημείο Κ ξεκινά να ταλαντώνεται με τον ίδιο τρόπο που ξεκινά να ταλαντώνεται και το υλικό σημείο O(x = 0), δηλαδή με $\upsilon = +\upsilon_{max}$. Συνεπώς φτάνει για δεύτερη φορά σε απομάκρυνση $y_1 = +0,1$ m όταν κινείται προς τη Θ.Ι. του, δηλαδή με αρνητική ταχύτητα. Άρα η ζητούμενη ταχύτητα είναι η: $\mathbf{\upsilon_1 = -\pi\sqrt{3}\ m/s}$

4. Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος 0,2 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x′Οx, προς την αρνητική φορά του άξονα. Το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο(x = 0) του άξονα ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 με μέγιστη θετική ταχύτητα μέτρου 0,5π m/s και τη χρονική στιγμή t_1 φτάνει για $11^η$ φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του, έχοντας διανύσει μέχρι τη στιγμή αυτή διάστημα 2,1 m.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σημείο Κ(x_K = –3 m) φτάνει στην ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης του για πρώτη φορά.

Λύση

α. Το υλικό σημείο Ο(x = 0) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t = 0 και τη στιγμή t_1 φτάνει για $11^η$ φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του. Για πρώτη φορά το υλικό σημείο φτάνει σε άκρο της ταλάντωσης του σε χρόνο $\frac{T}{4}$ και από κει και μετά χρειάζεται χρόνο $\frac{T}{2}$ για κάθε μετάβαση από το ένα άκρο στο άλλο. Αυτό σημαίνει ότι: $t_1 = 10\frac{T}{2} + \frac{T}{4} \Rightarrow \mathbf{t_1 = \frac{21T}{4}}$

Αφού σε κάθε $\frac{T}{4}$ το υλικό σημείο Ο(x = 0) διανύει διάστημα που ισούται με A (πλάτος της ταλάντωσης στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ το υλικό σημείο Ο διανύει συνολικά διάστημα s = 21A. Έχουμε:

s = 21A ⇒ **A = 0,1 m**

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $υ_{max}$ = 0,5π m/s.

Είναι: $υ_{max} = ωA \Rightarrow 0{,}5π = ω \cdot 0{,}1 \Rightarrow ω = 5π$ rad/s

Επίσης: $ω = 2πf \Rightarrow f = 2{,}5$ Hz

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $υ = λf \Rightarrow$ **υ = 0,5 m/s**

β. Το υλικό σημείο Ο(x = 0) ξεκινά τη χρονική στιγμή t = 0 να ταλαντώνεται έχοντας μέγιστη θετική ταχύτητα και το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x′Οx. Συνεπώς η εξίσωση του κύματος είναι η $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$. Είναι $T=\frac{1}{f} \Rightarrow$ T = 0,4 s, οπότε:

$$y = 0,1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0,4}+\frac{x}{0,2}\right) \Rightarrow \mathbf{y = 0,1\eta\mu 2\pi(2,5t+5x)}\ \text{(S.I.)}$$

γ. 1ος Τρόπος: Τη χρονική στιγμή t = 0 το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Ο(x = 0) χωρίς να έχει περάσει πέρα από αυτό. Για να βρούμε ποια χρονική στιγμή το υλικό σημείο Κ(x_K = –3 m) φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία αρνητική θέση της ταλάντωσης του (y = –A), μπορούμε να βρούμε πρώτα τη χρονική διάρκεια που χρειάζεται το κύμα για να διαδοθεί από το Ο στο Μ και στη συνέχεια να προσθέσουμε και $\frac{3T}{4}$, όσος είναι ο χρόνος που χρειάζεται το Κ για να μεταβεί από τη Θ.Ι. του στη θέση απομάκρυνσης y_K = –A. Δηλαδή η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η: $t_1 = t_K + \frac{3T}{4}$ όπου t_K ο χρόνος άφιξης του κύματος στο σημείο Κ.

Είναι: $\upsilon = \frac{|x_K|}{t_K} \Rightarrow t_K = \frac{|x_K|}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{t_K = 6s}$

Συνεπώς: $t_1 = 6 + \frac{3\cdot 0,4}{4} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 6,3s}$

2ος τρόπος: Τη ζητούμενη χρονική στιγμή μπορούμε να την υπολογίσουμε θέτοντας στην εξίσωση του κύματος όπου x = x_K = –3 m και y = –A = –0,1 m.

Είναι: –0,2 = 0,2ημ2π[2,5t_1 + 5(–3)] ⇒ ημ(5πt_1 –30π) = –1 ⇒ $5\pi t_1 - 30\pi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{t_1 = \frac{4k+63}{10}\ s}$

Άρα για πρώτη φορά (k = 0) ⇒ **t_1 = 6,3 s**.