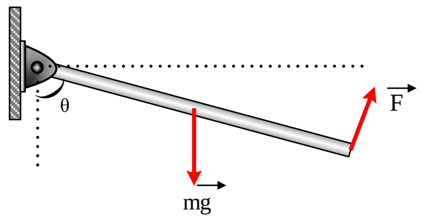
Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ, **Α2.** α, **Α3.** γ, **Α4.** α, **Α5.** Σ, Λ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

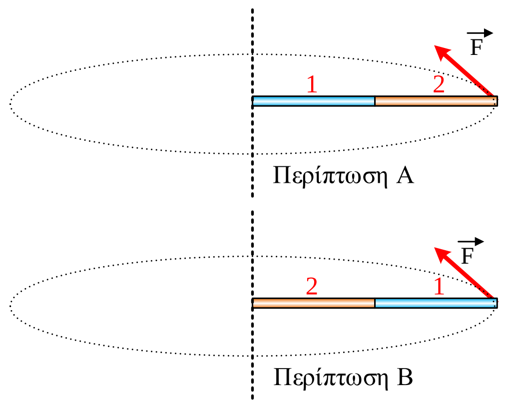


Σε μία τυχαία θέση θα έχουμε: $\Sigma\tau = \tau_F - \tau_w = F\ell - mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \Rightarrow$

$$\Sigma\tau = (c + 0,5mg\cdot\eta\mu\theta)\ell - mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta = c\ell = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα λοιπό θα έχουμε: $\Sigma\tau = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow I\alpha_\gamma = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{I} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Β2. Α. Σωστή απάντηση είναι η **γ**.



Η κινητική ενέργεια κάθε συστήματος θα είναι ίση με το έργο που προσφέρει η δύναμη $\vec{F}$.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι: $W_F = \tau_F \cdot \theta \Rightarrow W_F = F\ell \cdot 2\pi$ που είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

Β. Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Η ράβδος 2 έχει τις ίδιες διαστάσεις με την ράβδο 1 αλλά λόγω της μεγαλύτερης πυκνότητας θα έχει μεγαλύτερη μάζα $m_2 > m_1$.

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος μετρά την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής, έτσι όσο πιο μακριά είναι κατανεμημένη η μάζα του σώματος από τον άξονα περιστροφής τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας του.

Στο σύστημα Α έχουμε την μεγαλύτερη μάζα εξωτερικά έτσι $I_A > I_B$.

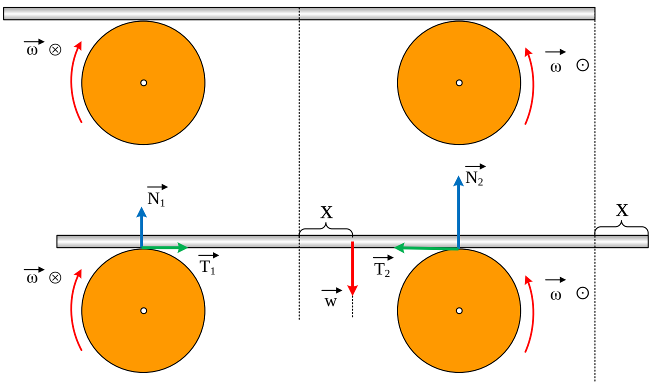
Αποδείξαμε πιο πάνω ότι $K_A = K_B$ άρα: $K_A = K_B \Rightarrow \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{\frac{I_B}{I_A}} < 1 \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} < 1 \Rightarrow \omega_A < \omega_B$

Η στιγμιαία ισχύς της ροπής της δύναμης είναι $P = \tau_F \cdot \omega = F\ell \cdot \omega$ και επειδή $\omega_A < \omega_B$ τότε θα έχουμε $P_A < P_B$.

Β3. Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Η σανίδα θα κάνει ταλάντωση πάνω στους κυλίνδρους.

Η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται κάθε T/2 όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.



Στο κατακόρυφο άξονα έχουμε ισορροπία άρα:

$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = w \quad (1).$

Επειδή η σανίδα κινείται ισχύει $\Sigma\tau = 0$ μόνο ως προς το κέντρο μάζας της. $\Sigma\tau_{cm} = 0 \Rightarrow$

$$-N_1(\frac{d}{2}+x) + N_2(\frac{d}{2}-x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{2}(N_2 - N_1) - x(N_1 + N_2) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{d}{2}(N_2 - N_1) - x\,w = 0 \Rightarrow N_1 - N_2 = -\frac{2w}{d}x \quad (2)$$

Σε μία τυχαία μετατόπιση x προς τα δεξιά (θετική φορά προς τα δεξιά)

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \Sigma F = T_1 - T_2 = \mu(N_1 - N_2) \overset{(2)}{=} -\frac{2\mu w}{d}x \Rightarrow \Sigma F = -Dx \quad \text{με } D = \frac{2\mu mg}{d}$$

Η περίοδος είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2\mu mg}{d}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$

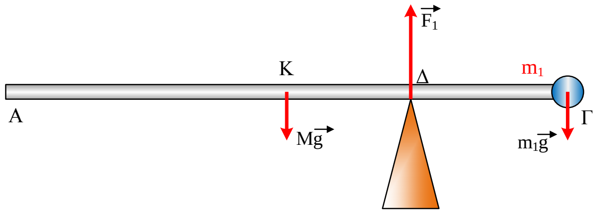
Βλέπουμε ότι η περίοδος μειώνεται με την μείωση του d, άρα $\Delta t_1 > \Delta t_2$.

ΘΕΜΑ Γ

α. Το κέντρο μάζας της ράβδου (σημείο Κ) απέχει από το σημείο Δ απόσταση:

$$(K\Delta)=(K\Gamma)-(\Gamma\Delta)=\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{3}\Rightarrow(K\Delta)=\frac{\ell}{6}$$

Το σύστημα ράβδος – Σ_1 ισορροπεί οπότε



$$\Sigma\vec{\tau}=0\Rightarrow Mg\frac{\ell}{6}-m_1g\frac{\ell}{3}=0\Rightarrow m_1=\frac{M}{2}\Rightarrow \mathbf{m_1=1kg}$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος, ράβδος – Σ_1:

$$I=I_{cm,\rho}+\frac{M\ell^2}{36}+\frac{m_1\ell^2}{9}=\frac{M\ell^2}{12}+\frac{M\ell^2}{36}+\frac{M\ell^2}{18}=\frac{M\ell^2}{6}\Rightarrow \mathbf{I=3kg\cdot m^2}$$

β. Η ροπή αδράνειας μόνο της ράβδου είναι: $I_\rho=I_{cm,\rho}+\frac{M\ell^2}{36}=\frac{M\ell^2}{12}+\frac{M\ell^2}{36}=\frac{4M\ell^2}{36}\Rightarrow \mathbf{I_\rho=2kg\cdot m^2}$

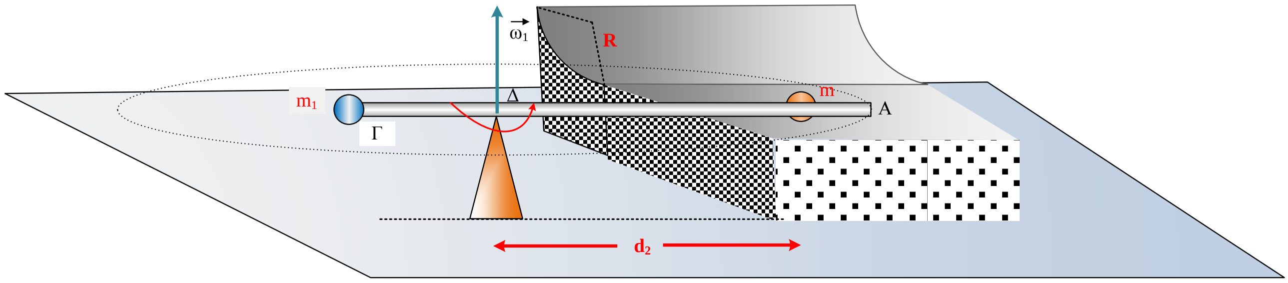
Η μεταβολή της στροφορμής της ράβδου είναι (θεωρούμε την δεξιόστροφη φορά ως θετική)

$$\Delta\vec{L}_\rho=\vec{L}_{\rho,\tau\epsilon\lambda}-\vec{L}_{\rho,\alpha\rho\chi}\Rightarrow\Delta L_\rho=I_\rho\omega_2-I_\rho\omega_1\Rightarrow\omega_2=\frac{\Delta L_\rho}{I_\rho}+\omega_1\ \ (1)$$

Αλλά για το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας έχουμε: $\omega_1=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\Rightarrow\omega_1=\frac{\pi}{\frac{\pi}{5}}\Rightarrow \boldsymbol{\omega_1=5\frac{rad}{s}}$

Έτσι από την (1) έχουμε: $\omega_2=(\frac{-6}{2}+5)\frac{rad}{s}\Rightarrow \boldsymbol{\omega_2=2\frac{rad}{s}}$

Για να βρούμε την ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα μετά την κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Σ. για το σύστημα ράβδος – Σ_1 και σφαίρα ως προς το σημείο Δ.



$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow I\omega_1 = I\omega_2 + m\upsilon_{cm,0}d_2 \Rightarrow \upsilon_{cm,0} = \frac{I\omega_1 - I\omega_2}{md_2} \Rightarrow \upsilon_{cm,0} = \frac{3\cdot 5 - 3\cdot 2}{1\cdot 1,5}\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{cm,0} = 6\frac{m}{s}}$$

Άρα το μέτρο της ορμής της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση είναι: $p = m\upsilon_{cm,0} \Rightarrow$ **$p = 6$ kg·m/s^2**.

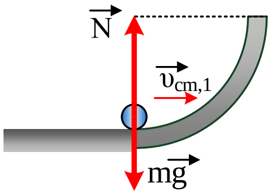
γ. Η σφαίρα μετά την κρούση ολισθαίνει για λίγο διάστημα και στην συνέχεια κυλίεται χωρίς ολίσθηση. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας της σφαίρας για όσο διαρκεί η ολίσθηση είναι:

(Η ολική κινητική ενέργεια σφαίρας όταν κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,σφ}\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_{cm}^2}{r^2} \Rightarrow K = \frac{7}{10}m\upsilon_{cm}^2)$$

$$E_{απ} = K_0 - K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm,0}^2 - \frac{7}{10}m\upsilon_{cm,1}^2 \Rightarrow \upsilon_{cm,1} = \sqrt{\frac{10}{14}\upsilon_{cm,0}^2 - \frac{10E_{απ}}{7}} \Rightarrow \upsilon_{cm,1} = \sqrt{\frac{10}{14}36 - \frac{10\cdot 6,8}{7}}\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{cm,1} = 4\frac{m}{s}}$$

Μόλις η σφαίρα μπει στο τεταρτοκύκλιο αρχίζει η κυκλική κίνηση οπότε ισχύει:



$$\Sigma\vec{F}_R = \vec{F}_κ \Rightarrow N - mg = \frac{m\upsilon_{cm,1}^2}{R-r} \Rightarrow N = m(g + \frac{m\upsilon_{cm,1}^2}{R-r}) \Rightarrow \boldsymbol{N = \frac{2090}{49}N}$$

δ. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας στο τεταρτοκύκλιο από την κατώτερη θέση μέχρι την στιγμή λίγο πριν την εγκατάλειψη.

$$K_2 - K_1 = W_w \Rightarrow \frac{7}{10}m\upsilon_{cm,2}^2 - \frac{7}{10}m\upsilon_{cm,1}^2 = -mg(R-r) \Rightarrow \upsilon_{cm,2} = \sqrt{\upsilon_{cm,1}^2 - \frac{10g(R-r)}{7}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{cm,2} = \sqrt{16 - \frac{10\cdot 10\cdot 0,49}{7}}\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{cm,2} = 3\frac{m}{s}}.$$

Μετά το χάσιμο της επαφής η σφαίρα θα εκτελέσει δύο ανεξάρτητες κινήσεις. Μία ομαλή κυκλική και μία επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση. Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. μέχρι την θέση του μέγιστου ύψους.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}I_{cm,σφ}\omega_2^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_{cm,2}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,σφ}\omega_2^2\right) = -mgh \Rightarrow h = \frac{\upsilon_{cm,2}^2}{2g} \Rightarrow \boldsymbol{h = 0,45\,m}.$$

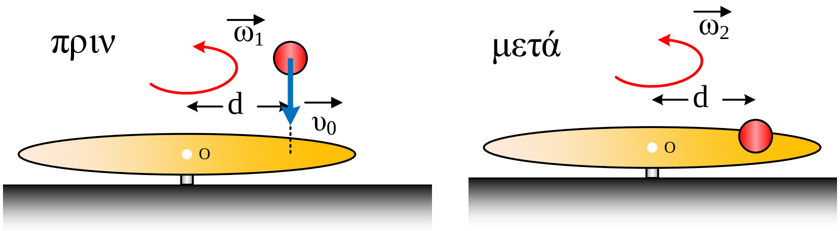
ε. Όπως είπαμε και πιο πάνω η σφαίρα όσο βρίσκεται στον αέρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, συνεπώς η στροφορμή της σφαίρας εξαιτίας της ιδιοπεριστροφής της είναι κάθε στιγμή σταθερή και ίση με αυτή που είχε όταν εγκατέλειψε το τεταρτοκύκλιο.

$\upsilon_{cm,2} = \omega_2 r \Rightarrow \omega_2 = 300$ rad/s. Έτσι $L = I_{cm,\sigma\varphi}\cdot\omega_2 = \frac{2}{5}mr^2\omega_2 \Rightarrow L = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 0,0001\cdot 300\frac{kg\cdot m^2}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{L = 0,012\frac{kg\cdot m^2}{s}}$.

ΘΕΜΑ Δ

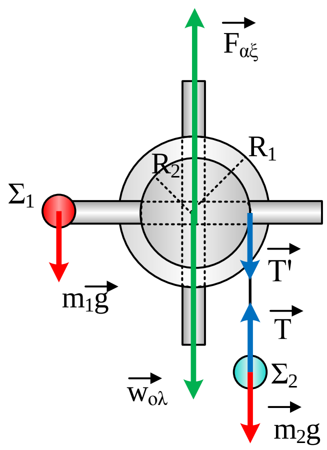
α. Για το σύστημα δίσκος - Σ_1 δεν έχουμε εξωτερικές ροπές οπότε διατηρείται στροφορμή του. Έτσι έχουμε:



$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I_\delta\omega_1 = (I_\delta + m_1 d^2)\omega_2 \Rightarrow I_\delta(\omega_1 - \omega_2) = m_1 d^2\omega_2 \Rightarrow \frac{I_\delta(\omega_1-\omega_2)}{d^2\omega_2} = m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{0,9\cdot 20}{0,09\cdot 200}kg \Rightarrow$$

$\mathbf{m_1 = 1kg}$

β. Για την ισορροπία του Σ_2 έχουμε: $\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow T' = m_2 g \Rightarrow T = m_2 g$ (1)



Το όλο σύστημα αρχικά ισορροπούσε, συνεπώς:

$$\Sigma\vec{\tau} = 0 \Rightarrow m_1 g\frac{\ell}{2} = TR_2 \Rightarrow m_1 g\frac{\ell}{2} = m_2 gR_2 \ (2).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το κέντρο του κυλίνδρου είναι:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \Sigma\vec{\tau} \Rightarrow \left.\frac{dL}{dt}\right|_{\sigma\upsilon\sigma\tau.} = m_2 gR_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \left.\frac{dL}{dt}\right|_{\sigma\upsilon\sigma\tau.} = m_1 g\frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2\left.\frac{dL}{dt}\right|_{\sigma\upsilon\sigma\tau.}}{m_1 g} \Rightarrow$$

$\ell = \frac{2\cdot 5}{10}m \Rightarrow \boldsymbol{\ell = 1m}$

γ. Από την κινητική ενέργεια του $Σ_2$ έχουμε:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2υ_2^2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2}m_2ω^2R_2^2 \Rightarrow m_2R_2^2 = \frac{2K_2}{ω^2} \Rightarrow m_2R_2^2 = \frac{1}{10}\text{kg}\cdot\text{m}^2 \quad (3)$$

Είδαμε όμως ότι $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{συστ.} = m_2gR_2 \Rightarrow m_2R_2 = \frac{\left.\frac{dL}{dt}\right|_{συστ.}}{g} \Rightarrow m_2R_2 = 0,5\,\text{kg}\cdot\text{m} \quad (4)$

Με διαίρεση των (2) και (3) προκύπτει: $\frac{m_2R_2^2}{m_2R_2} = \frac{0,1}{0,5}\text{m} \Rightarrow$ **$R_2 = 0,2\,\text{m}$** και από την (4) $\Rightarrow$ **$m_2 = 2,5$ kg**.

Η ακτίνα του κυλίνδρου είναι: $R_1 = R_2 + 50\%R_2 \Rightarrow R_1 = 0,3$ m.

Η ροπή αδράνειας του στερεού είναι:

$$I = 2I_1 + I_2 = 2\frac{1}{12}M_1\ell^2 + \frac{1}{2}M_2R_1^2 \Rightarrow I = (\frac{1}{6}\cdot 0,54\cdot 1 + \frac{1}{2}18\cdot 0,09)\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \Rightarrow I = 0,9\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Η στροφορμή του συστήματος στερεό – $Σ_2$ ως προς τον άξονα του στερεού είναι κάθε χρονική στιγμή:

$$L = Iω + m_2υ_2R_2 \Rightarrow \left.\frac{dL}{dt}\right|_{συστ.} = Iα_γ + m_2α_2R_2 = Iα_γ + m_2α_γR_2R_2 = (I + m_2R_2^2)α_γ \Rightarrow α_γ = \frac{\left.\frac{dL}{dt}\right|_{συστ.}}{I + m_2R_2^2} \Rightarrow$$

$α_γ = 5\ \text{rad/s}^2$.

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_2$ είναι:

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}m_2υ_2^2)}{dt} = \frac{1}{2}m_2 2υ_2\frac{dυ_2}{dt} = m_2υ_2α_2 \Rightarrow \frac{dK_2}{dt} = m_2υ_2α_γR_2 \quad (5)$$

Από την κινητική ενέργεια του $Σ_2$ έχουμε: $K_2 = \frac{1}{2}m_2υ_2^2 \Rightarrow υ_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m_2}} \Rightarrow$ **$υ_2 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$**

Έτσι από την (4) έχουμε: **$\frac{dK_2}{dt} = 5\frac{\text{J}}{\text{s}}$**