ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

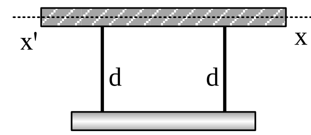
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: Κινήσεις στερεών, ροπή αδράνειας, ισορροπία στερεού

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1.β, Α.2.β, Α.3.β, Α.4.β, Α.5. Λ, Σ, Λ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β



Β.1. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μία ράβδο μάζας Μ και μήκους ℓ κρεμασμένη από δύο κατακόρυφα σχοινιά μήκους d. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα x'x είναι:

α. $M\ell^2$ **β.** Md^2 **γ.** $\frac{1}{12}M\ell^2$ **δ.** $\frac{1}{12}M\ell^2 + Md^2$

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$

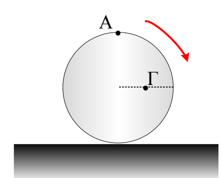
Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η **β**.

Χωρίζω την ράβδο σε ν στοιχειώδες μάζες οι οποίες απέχουν όλες d από τον άξονα x'x σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε $I = m_1 d^2 + m_2 d^2 + ... + m_\nu d^2 = (m_1 + m_2 + ... + m_\nu)d^2 = Md^2$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

Η ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου ως προς άξονα που βρίσκεται κατά μήκος της ράβδου είναι $I_{cm} = 0$ αφού όλη η μάζα είναι κατανεμημένη πάνω στο άξονα περιστροφής. Για άξονα παράλληλο σε αυτόν που απέχει απόσταση d ισχύει το θεώρημα του Steiner $I = I_{cm} + Md^2 \Rightarrow I = Md^2$

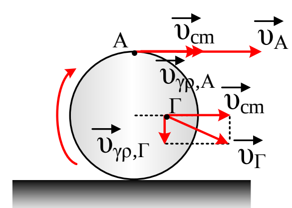


Β.2. Ο τροχός του διπλανού σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Το σημείο Γ που βρίσκεται στο μέσο της οριζόντιας ακτίνας, έχει εκείνη την στιγμή ταχύτητα μέτρου υ_Γ. Την ίδια χρονική στιγμή το ανώτερο σημείο Α έχει ταχύτητα μέτρου:

α. $2\upsilon_\Gamma$ **β.** $0{,}8\sqrt{5}\upsilon_\Gamma$ **γ.** $2\sqrt{2}\upsilon_\Gamma$

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η **β**.



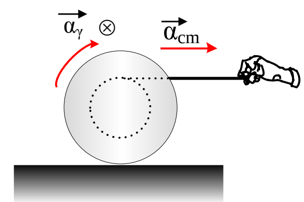
Εφόσον έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει $\upsilon_{cm} = \omega R$. Το σημείο Α έχει μεταφορική ταχύτητα υ_{cm} και γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho,A} = \omega R$ και σύμφωνα με το σχήμα: $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho,A} \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega R \Rightarrow \upsilon_A = 2\upsilon_{cm}$

Για το σημείο Γ έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_\Gamma = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho,\Gamma} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + (\omega\frac{R}{2})^2} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \frac{\upsilon_{cm}^2}{4}} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}\upsilon_{cm}$$

Διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε: $\frac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = \frac{2\upsilon_{cm}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\upsilon_{cm}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 0{,}8\sqrt{5} \Rightarrow \upsilon_A = 0{,}8\sqrt{5}\upsilon_\Gamma$

Β.3. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα κύλινδρο που στο μέσο του έχουμε ανοίξει ένα αυλάκι ώστε τα σημεία του νήματος που είναι τυλιγμένα στο καρούλι να απέχουν από το κέντρο απόσταση R/2 όπου R η ακτίνα του καρουλιού. Το καρούλι κινείται με επιτάχυνση μέτρου α_{cm}, χωρίς να ολισθαίνει. Το νήμα ξετυλίγεται με επιτάχυνση μέτρου:



α. α_{cm} **β.** $\frac{3}{2}\alpha_{cm}$ **γ.** $\frac{1}{2}\alpha_{cm}$

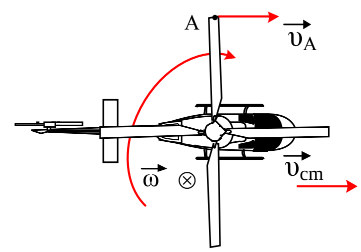
Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η **γ**.

Για να ξετυλιχθεί το νήμα θα πρέπει κύλινδρος να περιστραφεί. Δηλαδή το ξετύλιγμα έχει να κάνει με την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου που το νήμα εγκαταλείπει τον κύλινδρο. Έτσι λοιπόν:

$$\alpha_{\nu\eta\mu} = \alpha_{\varepsilon\pi\iota\tau\rho} = \alpha_\gamma \frac{R}{2} \Rightarrow \alpha_{\nu\eta\mu} = \frac{\alpha_{cm}}{2}$$

Β.4. Το ελικόπτερο του διπλανού σχήματος κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{cm} = 20$ m/s. Οι έλικες έχουν μήκος d = 2 m και περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω = 20 rad/s. Η ταχύτητα του άκρου Α του έλικα που φαίνεται στο σχήμα έχει μέτρο:



α. 60 m/s **β.** 40 m/s **γ.** 20 m/s

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η **α**.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το σημείο Α έχει μία μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ και μία γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$. Ισχύει: $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega d \Rightarrow \upsilon_A = 60\frac{m}{s}$.

ΘΕΜΑ Γ

α. Η ροπή αδράνειας των δύο ράβδων που αρθρώνονται Κ και Λ υπολογίζονται με το θεώρημα Steiner.

$$I_1 = I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}m\ell^2$$

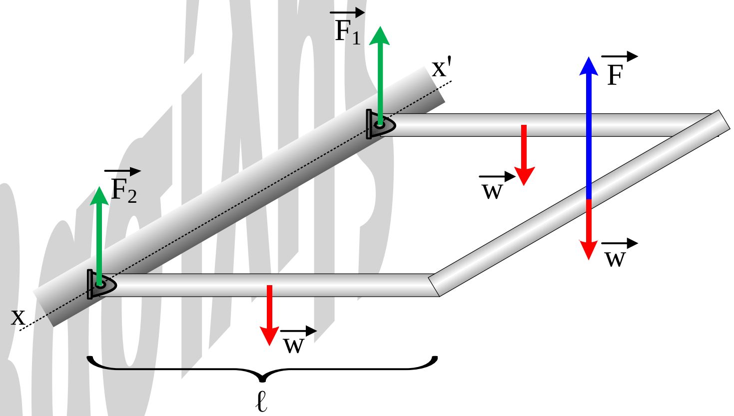
Η ροπή αδράνειας της παράλληλης ράβδου ως προς τον άξονα x'x υπολογίζεται με βάση τον ορισμό της ροπής αδράνειας, δηλαδή χωρίζοντας την σε ν στοιχειώδεις μάζες που όλες απέχουν από τον άξονα x'x απόσταση ℓ

$$I_2 = m_1\ell^2 + m_2\ell^2 + \ldots + m_\nu\ell^2 = (m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu)\ell^2 \Rightarrow I_2 = m\ell^2$$

ή με το θεώρημα του Steiner αφού η ροπή αδράνειας της ράβδου όταν βρίσκεται πάνω στον άξονα x'x είναι μηδέν. $I_2 = I_{cm} + m\ell^2 = 0 + m\ell^2 \Rightarrow I_2 = m\ell^2$

Άρα η ροπή αδράνειας του στερεού είναι: $I = 2I_1 + I_2 = \frac{2}{3}m\ell^2 + m\ell^2 \Rightarrow I = \frac{5}{3}m\ell^2 \Rightarrow$ **$I = 5\ kg \cdot m^2$**

β. Το στερεό Π ισορροπεί με την βοήθεια των δυνάμεων που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

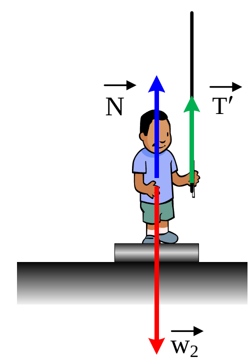


$$\Sigma\tau_{x'x} = 0 \Rightarrow -w\frac{\ell}{2} - w\frac{\ell}{2} - w\ell + F\ell = 0 \Rightarrow F = 2w \Rightarrow$$

F = 60 N

Το στερεό ασκεί στην δοκό μία δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς **F' = F = 60 N**.

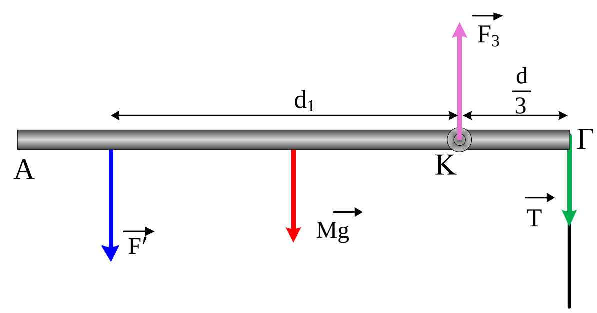
γ. Το παιδί ισορροπεί οπότε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow T' + N = w_1$



Η ένδειξη της ζυγαριάς μας δείχνει το φαινόμενο βάρος το οποίο είναι $w_2 = m_2g$ οπότε και $N = m_2g = 30$ N.

Έτσι $T' + N = w_1 \Rightarrow \Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow T' = m_1g - N \Rightarrow$ **$T' = 150\,N$** Το νήμα είναι αβαρές άρα T = T' = 150 N

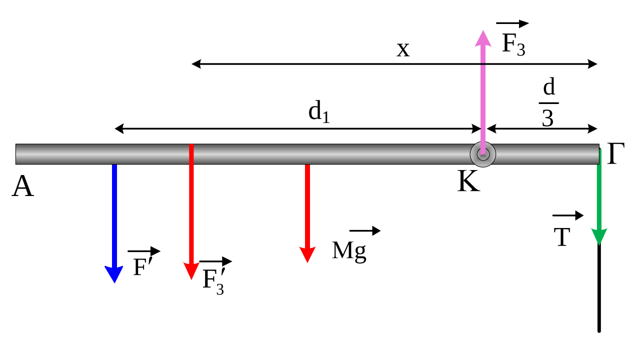
Η δοκός ισορροπεί:



$$\Sigma\tau_K = 0 \Rightarrow F'd_1 + Mg(\frac{d}{2} - \frac{d}{3}) - T\frac{d}{3} = 0 \Rightarrow d_1 = \frac{d(2T - Mg)}{6F'}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{6(300-120)}{6 \cdot 60}m \Rightarrow$$ **$d_1 = 3$ m**.

δ. Έστω το σώμα m_3 βρίσκεται σε απόσταση x από το άκρο Γ την στιγμή που αυτή είναι έτοιμη να "γείρει". Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ζυγαριά να δείχνει μηδέν, δηλαδή



το παιδί μόλις που χάνει την επαφή του με την ζυγαριά. Άρα $T' = w_2 \Rightarrow T' = 180$ N και επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε: $T' = T = 180$ N.

Η δύναμη F' δεν θα αλλάξει αφού εξαρτάται από τα βάρη των τριών ράβδων που δεν έχουν καμιά μεταβολή.

Το σώμα m_3 ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα έτσι κάθε στιγμή ισχύει: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_3 = w_3 \Rightarrow F_3 = 30\,\text{N}$.

Το σώμα m_3 ασκεί μία αντίδραση $\vec{F}_3' = -\vec{F}_3$ και μέτρου $F_3' = F_3 = 30\,\text{N}$

Από την ισορροπία της δοκού έχουμε: $\Sigma\tau_K = 0 \Rightarrow F'd_1 + Mg(\frac{d}{2} - \frac{d}{3}) + F_3'(x - \frac{d}{3}) - T\frac{d}{3} = 0 \Rightarrow$

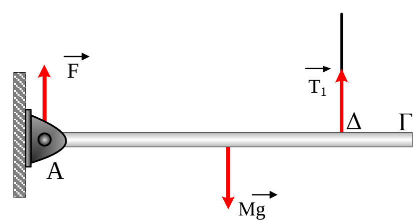
$$x = \frac{2Td - Mgd - 6F'd_1}{6F_3'} + \frac{d}{3} \Rightarrow x = \frac{2\cdot 180\cdot 6 - 12\cdot 10\cdot 6 - 6\cdot 60\cdot 3}{6\cdot 30}\text{m} + 2\text{m} \Rightarrow \mathbf{x = 4\,m}$$

Η κίνηση του σώματος m_3 είναι ευθύγραμμη ομαλή έτσι: $x = \upsilon\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{x}{\upsilon} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 20\,s}$

ΘΕΜΑ Δ

Λύση

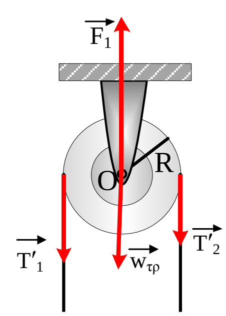
α. Η δοκός ισορροπεί οπότε ισχύει:



$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow T_1 d - Mg\frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{Mg\ell}{2d} \Rightarrow T_1 = \frac{8\cdot 10\cdot 5}{2\cdot 4}\text{N} \Rightarrow \mathbf{T_1 = 50\,N}$$

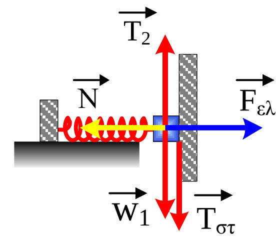
και αφού το νήμα είναι αβαρές έχουμε: **$T_1 = T'_1 = 50$ N**.

Επίσης ισχύει: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F + T_1 - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg - T_1 \Rightarrow \mathbf{F = 30\,N}$.



Η τροχαλία δεν στρέφεται άρα: $\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow T_1'r - T_2'R = 0 \Rightarrow T_1'r = T_2'2r \Rightarrow \mathbf{T_2' = 25\,N}$

Άρα το σώμα δέχεται μία δύναμη ίδιου μέτρου με την $\vec{T}_2$ και αντιθέτου φοράς επειδή το νήμα είναι αβαρές, οπότε: $T_2' = T_2 \Rightarrow \mathbf{T_2 = 25\,N}$



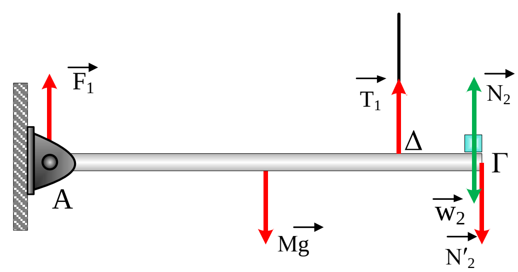
β. Το σώμα Σ ισορροπεί και επειδή $w_1 = 10$ N < T_2 η στατική τριβή έχει την κατεύθυνση του βάρους.

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T_2 - w_1 - T_{στ} = 0 \Rightarrow T_{στ} = T_2 - w_1 \Rightarrow \mathbf{T_{στ} = 15\,N}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση το σώμα μόλις που δεν ολισθαίνει, συνεπώς η στατική τριβή έχει την μέγιστη της τιμή δηλαδή: $T_{στ} = T_{max} = \mu N \Rightarrow N = \frac{T_{στ}}{\mu} \Rightarrow N = \frac{15}{0,5} \Rightarrow \mathbf{N = 30\,N}$

Στον άξονα x'x έχουμε ισορροπία, οπότε:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = N \Rightarrow F_{ελ} = 30\,N \Rightarrow k\Delta\ell = 30\,N \Rightarrow k = \frac{30}{0,1}\frac{N}{m} \Rightarrow \mathbf{k = 300\,\frac{N}{m}}.$$



γ. Αν διπλασιάσουμε την συσπείρωση του ελατηρίου τότε διπλασιάζεται και η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ.

$F'_{ελ} = k2\Delta\ell \Rightarrow F'_{ελ} = 60\,N$ άρα και $N' = F'_{ελ} = 60$ N και η μέγιστη στατική τριβή $T'_{max} = \mu N' \Rightarrow T'_{max} = 0,5 \cdot 60$ N $\Rightarrow$ **$T'_{max} = 30$ N**.

Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε: $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T'_2 - w_1 - T'_{max} = 0 \Rightarrow \mathbf{T'_2 = 40\,N}$ άρα **$T_2 = 40$ N**.

Σημείωση: Οι δυνάμεις T_1, T'_1, T_2, T'_2 είναι όλες διαφορετικές σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα απλώς κρατούμε τον ίδιο συμβολισμό.

Για την τροχαλία ομοίως με πριν προκύπτει: $T'_1 = 2T'_2 \Rightarrow T'_1 = 80$ N και $T_1 = T'_1 = 80$ N.

Η μάζα m_1 θα ισορροπεί πάνω στην δοκό οπότε: $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow m_2 g = N_2$ (1)

Η αντίδραση της $\vec{N}_2$ η $\vec{N}'_2$ είναι αυτή που μπορεί να διαταράξει την ισορροπία της δοκού.

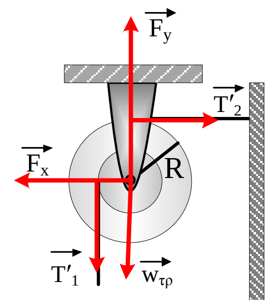
Η ροπή που θα ασκηθεί στην δοκό εξαιτίας της μάζας m_1 (ως προς το Α) θα έχει μέτρο $\tau = N'_2 x$ όπου x η απόσταση από το σημείο Α. Για να μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε χωρίς να μετακινηθεί το Σ, αρκεί να ισορροπεί εκεί που έχει την μεγαλύτερη ροπή, δηλαδή στο άκρο της ράβδου έτσι θα έχουμε:

$$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow T_1 d - Mg\frac{\ell}{2} - N'_2\ell = 0 \Rightarrow N'_2 = \frac{T_1 d}{\ell} - \frac{Mg}{2} \Rightarrow N'_2 = \frac{80\cdot 4}{5} - \frac{8\cdot 10}{2} \Rightarrow \mathbf{N'_2 = 24\,N}$$

Τελικά $N_2 = N'_2 = 24$ N. Άρα από την (1) $\Rightarrow$ **m_2 = 2,4 kg**.

δ. Η δύναμη $\vec{T}'_1$ είναι ίδια με αυτή που βρήκαμε στο α ερώτημα, η τροχαλία δεν στρέφεται οπότε και η T'_2 θα έχει μεν διαφορετική κατεύθυνση αλλά ίδιο μέτρο με πριν. Έτσι: $T'_1 = 50\,N$ και $T'_2 = 25\,N$

.



Οι δυνάμεις που δέχεται η τροχαλία φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Έχουμε $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_x = T'_2 \Rightarrow \mathbf{F_x = 25\,N}$ και $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_y = T'_1 + w_{\tau\rho} \Rightarrow \mathbf{F_y = 60\,N}$

Άρα: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{25^2 + 60^2}\,N = \sqrt{5^2(5^2 + 13^2)}\,N \Rightarrow F = 5\cdot 13\,N \Rightarrow \mathbf{F = 65\,N}$

Η γωνία είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{60}{25} \Rightarrow \mathbf{\varepsilon\varphi\theta = \frac{13}{5}}$.