ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ …………………………………………………………………………………….

ΘΕΜΑ Α

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Α.1 Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση και η επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή:
α. έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο
β. έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο
γ. θα έχουν το ίδιο ή αντίθετο πρόσημο ανάλογα με την αρχική φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης
δ. μερικές φορές έχουν το ίδιο και άλλες φορές έχουν αντίθετο πρόσημο.

Α.2 Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Εάν διπλασιαστεί το πλάτος της ταλάντωσης, τότε:
α. Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα υποδιπλασιαστεί.
β. Η ενέργεια της ταλάντωσης θα τετραπλασιαστεί.
γ. Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος δεν θα μεταβληθεί.
δ. Η συχνότητα της ταλάντωσης θα διπλασιαστεί.

Α.3 Εάν το πλάτος της ταχύτητας ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή διπλασιαστεί, τότε:
α. Η περίοδος της ταλάντωσης διπλασιάζεται.
β. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης διπλασιάζεται.
γ. Το πλάτος της επιτάχυνσης του ταλαντωτή διπλασιάζεται.
δ. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται.

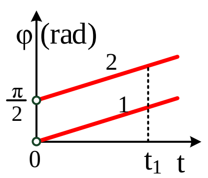
Α.4 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει:
α. Ολική ενέργεια ίση με το μηδέν.
β. Κινητική ενέργεια ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.
γ. Δυναμική ενέργεια ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.
δ. Κινητική ενέργεια ίση με το μηδέν.

Α.5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.
α. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση η ενέργεια μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο.
β. Κατά την διάρκεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης οι τιμές της δυναμικής ενέργειας ικανοποιούν την συνθήκη $0 \leq U \leq E$, όπου Ε η ενέργεια της ταλάντωσης.
γ. Στην διάρκεια μιας πλήρους ταλάντωσης η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι ίσες σε δύο χρονικές στιγμές.
δ. Το πλάτος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι ανεξάρτητο του χρόνου
ε. Η επιτάχυνση και η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας είναι μεγέθη συμφασικά.

ΘΕΜΑ Β

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση αιτιολογώντας την.

Β.1 Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι χρονικές μεταβολές των φάσεων δύο απλών αρμονικών ταλαντωτών (1) και (2). Οι δύο ταλαντωτές εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις με πλάτη A_1 και $A_2 > A_1$. Την απόσταση από το ένα άκρο της ταλάντωσης του στο άλλο την διανύει πιο γρήγορα ο ταλαντωτής:

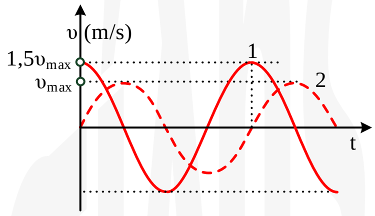


α. 1 **β.** 2 **γ.** την διανύουν σε ίσους χρόνους

Β.2 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση, με πλάτος Α και περίοδο Τ. Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται, προκειμένου το σώμα να μεταβεί από τη θέση ισορροπίας του στη θέση $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$, είναι:

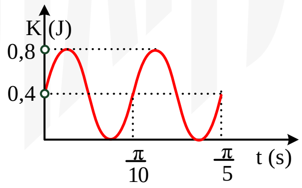
α. $\frac{T}{6}$ **β.** $\frac{\sqrt{2}T}{2}$ **γ.** $\frac{T}{8}$

Β.3 Δύο σώματα (1) και (2) έχουν μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα με $m_1 = 2m_2$ και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται γραφικά η χρονική μεταβολή της ταχύτητας κάθε σώματος. Οι μέγιστες τιμές των δυνάμεων επαναφοράς που δέχεται κάθε σώμα συνδέονται με τη σχέση:
α. $F_{max,1} = 3F_{max,2}$ **β.** $F_{max,1} = 2F_{max,2}$ **γ.** $F_{max,1} = 1{,}5F_{max,2}$



Β.4 Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Στο διάγραμμα του σχήματος παριστάνεται γραφικά η κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. Γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή t = 0 η απομάκρυνση του σώματος έχει θετική αλγεβρική τιμή. Η χρονική εξίσωση της Κινητικής Ενέργειας στο (S.I.) είναι:

α. $K = 0{,}8\sigma\upsilon\nu^2(10t + \frac{\pi}{4})$ **β.** $K = 0{,}8\sigma\upsilon\nu^2(20t + \frac{3\pi}{4})$ **γ.** $K = 0{,}8\sigma\upsilon\nu^2(10t + \frac{3\pi}{4})$



ΘΕΜΑ Γ

Ένα σώμα μάζας m = 2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f = \frac{5}{\pi}\text{Hz}$. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση, κινείται επιβραδυνόμενο και η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης. Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος έχει μέτρο $\alpha_{max} = 40\ m/s^2$.
Γ.1 Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της δύναμης επαναφοράς την χρονική στιγμή t = 0.
Γ.2 Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.
Γ.3 Να υπολογίσετε το πηλίκο της κινητικής ενέργειας προς την δυναμική ενέργεια την χρονική στιγμή t_1 που η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας είναι $x_1 = 0{,}1$ m
Γ.4 Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής την χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{60}s$

ΘΕΜΑ Δ

Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων Γ και Δ και χρειάζεται $\Delta t = \frac{\pi}{10}s$ για να μεταβεί από το ένα άκρο στο άλλο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην θέση x_0 στον θετικό ημιάξονα με υ > 0 και η ταχύτητα του μηδενίζεται για πρώτη φορά την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}s$.
Κάποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του ισούται με 10 m/s^2 ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ισούται με 20 $kg\cdot m/s^2$. Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης παίρνει τιμές $0 \le K \le 16$ J.
Δ.1 Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του υλικού σημείου.
Δ.2 Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από το Δ και την απομάκρυνση x_0.
Δ.3 Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ορμής του υλικού σημείου.
Δ.4 Να γράψετε τη χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου.
Δίνεται $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 2x}{2}$

Απαντήσεις
ΘΕΜΑ Α
Α.1 α, **Α.2** β **Α.3** γ **Α.4.** β **Α.5 α.** Λ, **β.** Σ, **γ.** Λ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β
Β.1 Σωστή απάντηση η γ.
Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $\omega_1 = \omega_2$ διότι το ω ισούται με την κλίση της ευθείας σε διάγραμμα φ – t.
Ο χρόνος που χρειάζεται ένα ταλαντούμενο σώμα για να μεταβεί από το ένα άκρο της ταλάντωσης του στο άλλο είναι ανεξάρτητος του πλάτους της ταλάντωσης του και ίσο με το μισό της περιόδου.
Άρα $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2$.

Β.2 Σωστή απάντηση είναι η γ.
Η ταλάντωση είναι χωρίς αρχική φάση οπότε είναι της μορφής x = Αημωt οπότε έχουμε:

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega t &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \omega t &= 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{8\kappa\pi + \pi}{4\omega} \\ t &= \frac{8\kappa\pi + 3\pi}{4\omega} \end{aligned}$$

Άρα το ελάχιστο χρονικό διάστημα είναι: $t = \dfrac{\pi}{4\omega} = \dfrac{\pi}{4\dfrac{2\pi}{T}} \Rightarrow t = \dfrac{T}{8}$

Β.3 Σωστή απάντηση είναι η **α**.
Από το σχήμα προκύπτει ότι $T_1 = T_2$ οπότε θα έχουμε και $\omega_1 = \omega_2$, επίσης:
$\upsilon_{max,1} = 1{,}5\upsilon_{max,2} \Rightarrow \omega\upsilon_{max,1} = 1{,}5\omega\upsilon_{max,2} \Rightarrow \alpha_{max,1} = 1{,}5\alpha_{max,2}$ άρα

$$\frac{F_{max,1}}{F_{max,2}} = \frac{m_1\alpha_{max,1}}{m_2\alpha_{max,2}} = \frac{2m_2 \cdot 1{,}5\alpha_{max,2}}{m_2\alpha_{max,2}} = 3 \Rightarrow F_{max,1} = 3F_{max,2}$$

Β.4 Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $K_{max} = 0{,}8$ J, $T = \dfrac{\pi}{5}$s και ότι την $t_0 = 0$ η κινητική ενέργεια είναι $K_0 = 0{,}4$ J.

Ισχύει: $K = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2_{max}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow K = K_{max}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0)$.

Επίσης από το διάγραμμα προκύπτει ότι μετά την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, η κινητική ενέργεια αυξάνεται, άρα θα αυξάνεται και το μέτρο της ταχύτητας δηλαδή το σώμα θα κινείται προς την Θ.Ι.
Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε $x > 0$, οπότε αφού έχουμε κίνηση προς την Θ.Ι. θα έχουμε $\upsilon < 0$.

Για t = 0 έχουμε: $K = K_{max}\sigma\upsilon\nu^2\varphi_0 \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}8\sigma\upsilon\nu^2\varphi_0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \overset{\upsilon<0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{3\pi}{4} \\ \varphi_0 &= \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$ αλλά πρέπει $x > 0$ για $t_0 = 0$.

Συνεπώς $x = A\eta\mu\dfrac{3\pi}{4} > 0$ και $x = A\eta\mu\dfrac{5\pi}{4} < 0$ άρα $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{4}$rad και $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\dfrac{rad}{s}$

Τελικά $K = 0{,}8\sigma\upsilon\nu^2(10t + \dfrac{3\pi}{4})$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 10$ rad/s.
Επίσης $\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow A = 0,4$ m.

$$E = K + U \Rightarrow E = 3U + U \Rightarrow E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}Dx_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{A}{2} \overset{x_0>0}{\Rightarrow} x_0 = 0,2\,m$$

Η σταθερά επαναφοράς είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200$ N/m.
Άρα η δύναμη επαναφοράς την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, είναι: $F_{\varepsilon\pi} = -Dx_0 \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -40$ N.

Γ.2 Για την αρχική φάση ισχύει: $\eta\mu\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\,rad \end{array}$

Το σώμα την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κινείται επιβραδυνόμενο, άρα κατευθύνεται προς ακραία θέση και επειδή $x > 0$, το σώμα κατευθύνεται προς το θετικό άκρο οπότε $\upsilon > 0$.

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ και $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Άρα $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad$

Έχουμε $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = 4$ m/s και $\alpha_{max} = \omega\upsilon_{max} \Rightarrow \alpha_{max} = 40$ m/s^2.

$x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.) $\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.) $\alpha = -40\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.)

Γ.3 Για το πηλίκο έχουμε:

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2}{\frac{1}{2}Dx_1^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{x_1^2} = \frac{0,16 - 0,01}{0,01} \Rightarrow \frac{K}{U} = 15$$

Γ.4 Την στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{60}$ s η απομάκρυνση είναι: $x_2 = 0,4\eta\mu(10\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{6})\ m = 0,4\eta\mu(\frac{\pi}{3})m \Rightarrow x_2 = 0,2\sqrt{3}\,m$

Έτσι: $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -40\sqrt{3}\frac{kg\cdot m}{s^2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Η χρονική διάρκεια μεταξύ των δύο άκρων είναι: $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$.

Έχουμε: $\Sigma F = m\alpha \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow m = 2\,kg$

Τελικά $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200$ N/m.

Δ.2 Έχουμε: $K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\frac{m}{s}$ αλλά $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = 0,4$ m.

Η απόσταση μεταξύ των δύο άκρων Γ και Δ είναι: $d = 2A \Rightarrow d = 0,8$ m.
Η εξίσωση της απομάκρυνσης από την Θ.Ι. είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και επειδή την χρονική στιγμή t_1 φτάνει στο άκρο ($\upsilon = 0$) θα έχουμε:

$$A = A\eta\mu(10\frac{\pi}{60} + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\frac{\pi}{6} + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi + 6\varphi_0 = 12\kappa\pi + 3\pi \Rightarrow \varphi_0 = \frac{12\kappa\pi + 2\pi}{6}$$

Άρα $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}\,rad$

Έτσι: $x_0 = 0,4\eta\mu\frac{\pi}{3}\ m \Rightarrow x_0 = 0,2\sqrt{3}\,m$

Δ.3 Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής $\upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{3})$ (S.I.)

Η εξίσωση της ορμής θα είναι: $p = m\upsilon \Rightarrow p = 8\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{3})$ (S.I.)

Δ.4 Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx\upsilon = -DA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\cdot\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{DA\upsilon_{max}}{2}\eta\mu(2\omega t + 2\varphi_0) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -160\eta\mu(20t + \frac{2\pi}{3}) \text{ (S.I.)}$$

Δουκατζής Βασίλης