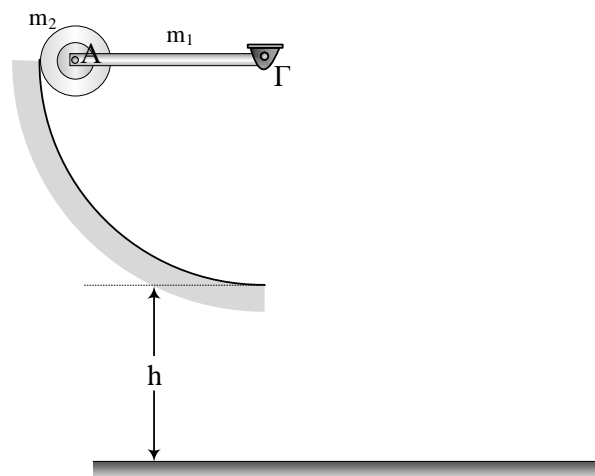


Οι άξονες είναι εύθραυστοι ... τώρα τελευταία.

Στο σχήμα βλέπουμε μία ράβδο μάζας $m_1 = 6 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 1,25 \text{ m}$ καθώς επίσης και έναν δίσκο μάζας m_2 και ακτίνας r . Το άκρο Α της ράβδου είναι συνδεδεμένο μέσω άξονα στο κέντρο του δίσκου. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά του όπως και η ράβδος γύρω από τον δικό της άξονα στο σημείο Γ. Το σύστημα αφήνεται από την οριζόντια θέση και κατά την κάθοδο ο



τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει στο δάπεδο σχήματος τεταρτοκυκλίου. Όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, ο άξονας σύνδεση των δύο στερεών σπάει (χωρίς απώλειες ενέργειας) και ράβδος συνεχίζει την περιστροφή της γύρω από το σημείο Γ, ενώ ο δίσκος εκτελεί οριζόντια βολή από το σημείο που εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο. Καθόλη την διάρκεια της κοινής κίνησης των δύο στερεών (ράβδος και δίσκος), η κινητική ενέργεια του δίσκου κάθε χρονική στιγμή ήταν μεγαλύτερη κατά 50% από αυτήν της ράβδου. Μετά τον αποχωρισμό η ράβδος ακινητοποιείται στιγμιαία όταν φτάσει σε μία θέση όπου η γωνία θ που σχηματίζει αυτή με την κατακόρυφο είναι τέτοια ώστε το συνημίτονο της να έχει τιμή $1/3$. Η ράβδος όταν περνά από την κατακόρυφη θέση έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια ως προς το δάπεδο $484,5 \text{ J}$, ενώ ο δίσκος "προσγειώνεται" σε οριζόντια απόσταση – από το κατώτερο μέρος του τεταρτοκυκλίου – $s = 6 \text{ m}$. Να βρεθούν:

- Η στροφορμή της ράβδου τη στιγμή που σπάει ο άξονας ως προς το σημείο Γ.
- Η μάζα του δίσκου
- Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.
- Την μεταβολή της στροφορμής του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του, από την στιγμή t_1 (το στερεό βρίσκεται ακόμη στο τεταρτοκύκλιο) όπου η στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Γ είναι $L_p = 6,25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 , όπου ο δίσκος έχει διανύσει οριζοντίως το μισό βεληνεκές του.

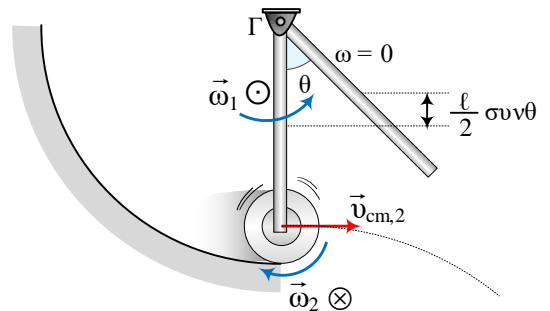
Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και οι ροπές αδράνειας των στερεών ως προς τους άξονες τους, Ράβδος $I_1 = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$

$$\text{Δίσκος } I_2 = \frac{1}{2} m_2 r^2.$$

Λύση $r = 0,25 \text{ m}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $v_{\text{cm}} = 13 \text{ m/s}$, $L_{\rho(\Gamma)} = 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $\Delta L = 5/8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

Λύση

α. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την ράβδο από την κατακόρυφη θέση μέχρι την στιγμή που στιγμιαία ακινητοποιείται.



$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 = -m_1 g \frac{\ell}{2} (1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} m_1 \ell^2 \omega_1^2 = m_1 g \ell \frac{2}{3} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \Rightarrow \omega_1 = 4 \text{ rad/s.}$$

$$L_{\rho,(\Gamma)} = I_p \omega_1 = \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \omega_1 \Rightarrow L_{\rho,(\Gamma)} = \frac{1}{3} 6 \cdot 1,25^2 \cdot 4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{L_{\rho(\Gamma)} = 12,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.}$$

β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου τη στιγμή που βρίσκεται στο κατώτερο σημείο είναι:

$$v_{\text{cm},2} = \omega_1 \cdot \ell \Rightarrow \mathbf{v_{\text{cm},2} = 5 \text{ m/s.}}$$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου για το διάστημα που κυλιέται στο τεταρτοκύκλιο είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_s \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{v_{\text{cm}}^2}{r^2} \Rightarrow K_2 = \frac{3}{4} m_2 v_{\text{cm}}^2$$

$$\text{Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε: } K_2 = 1,5 K_1 \Rightarrow \frac{3}{4} m_2 v_{\text{cm},2}^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \omega_1^2 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{3} \Rightarrow \mathbf{m_2 = 2 \text{ kg.}}$$

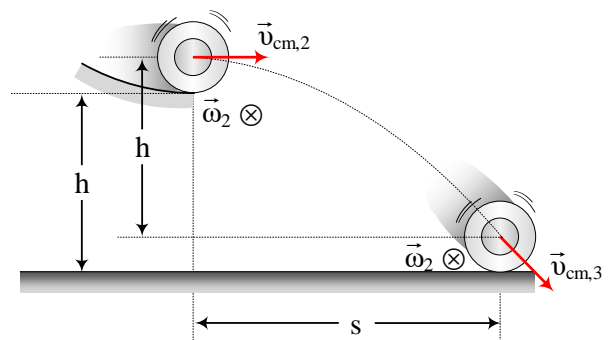
γ. Μετά το σπάσιμο του άξονα ο δίσκος εκτελεί οριζόντια

βολή με οριζόντια ταχύτητα $\mathbf{v_{\text{cm},2} = 5 \text{ m/s.}}$

Το βεληγεκές δίνεται από τη σχέση $s = v_{\text{cm},2} \Delta t \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 1,2 \text{ s}}$

Το ύψος από το οποίο γίνεται η οριζόντια βολή είναι:

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,44 \text{ m} \Rightarrow \mathbf{h = 7,2 \text{ m.}}$$



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή που ο δίσκος εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο μέχρι τη στιγμή λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος (η στροφοκική κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή).

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_{\text{cm},3}^2 + \frac{1}{2} I_{\delta} \omega_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{\text{cm},2}^2 - \frac{1}{2} I_{\delta} \omega_1^2 = m_2 g h \Rightarrow v_{\text{cm},3}^2 - v_{\text{cm},2}^2 = 2gh \Rightarrow$$

$$v_{\text{cm},3} = \sqrt{v_{\text{cm},2}^2 + 2gh} \Rightarrow \mathbf{v_{\text{cm},3} = 13 \text{ m/s.}}$$

Προφανώς στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τύπους της οριζόντιας βολής αφού $v_y = g\Delta t = 12 \text{ m/s}$

$$\text{και } v_{\text{cm},3} = \sqrt{v_{\text{cm},2}^2 + v_y^2} \Rightarrow \mathbf{v_{\text{cm},3} = 13 \text{ m/s.}}$$

δ. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι

$$U = m_1 g H \Rightarrow \mathbf{H = 8,075 \text{ m.}}$$

Αλλά το κέντρο μάζας απέχει από το δάπεδο

$$H = \ell/2 + r + h \Rightarrow r = H - h - \ell/2 \Rightarrow \mathbf{r = 0,25 \text{ m.}}$$

Η στροφορμή της ράβδου τη στιγμή που εκτελεί οριζόντια βολή είναι ίδια με αυτή που είχε την στιγμή που εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο αφού από κει και μετά δεν υπάρχουν ροπές να μεταβάλλουν την στροφορμή.

$$\text{Την χρονική στιγμή } t_2: v_{\text{cm},2} = \omega_2 r \Rightarrow \mathbf{\omega_2 = 20 \text{ rad/s.}}$$

$$\text{Για την χρονική στιγμή } t_1: L_p = I_p \omega \Rightarrow \omega = \frac{L_p}{\frac{1}{3} m_1 \ell^2} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s.}$$

$$\text{Άρα } v_{\text{cm}} = \omega \ell \Rightarrow \omega' r = \omega \ell \Rightarrow \mathbf{\omega' = 10 \text{ rad/s.}}$$

$$\text{Άρα } \Delta \vec{L} = \vec{L}_{\delta(t_2)} - \vec{L}_{\delta(t_1)} \Rightarrow \Delta L = L_{\delta(t_2)} - L_{\delta(t_1)} = I_{\delta} \cdot \omega_2 - I_{\delta} \omega' = I_{\delta} (\omega_2 - \omega') \Rightarrow \mathbf{\Delta L = 5/8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s.}}$$

